Analityczne Zoo
Zadania kwalifikacyjne

Filip Baciak, Piotr Dudziak

26 kwietnia 2024

Poniższe zadania przygotowaliśmy z myślą o kandydatach na różnych poziomach zaawansowania matematycznego, dlatego też zadania posortowano w kolejności rosnącego poziomu trudności! Nie przejmuj się, jeśli nie potrafisz rozwiązać ich wszystkich – wyślij tyle, ile potrafisz! Jest to też dla nas informacja zwrotna, żebyśmy mogli dopasować poziom kursu do uczestników. *Powodzenia!*

Zadanie 1 Udowodnij (np. używając indukcji matematycznej lub nierówności Jensena), że dla $n \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + ... + \sqrt{n^2+1} \geqslant \frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}.$$

Zadanie 2 Znajdź rozwinięcie w szereg Taylora funkcji:

$$f(x) = \log(1+x+x^2) \tag{1}$$

do wyrazów rzędu x^6. Bonusowe punkty za znalezienie zwartego wzoru na rozwinięcie Taylora w nieskończony szereg, podanie promienia zbieżności i zbadanie zachowania reszty.

Uwaga! Rozwinięcie to można zaleźć sprytnie, wiedząc że:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

z przedziałem zbieżności $x \in [-1, 1[$.

Zadanie 3 Oblicz następujące całki:

(a)

$$\int \sin x \cos x \, dx,$$

(b)

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)^n} \, dx,$$

(c)
$$\int \operatorname{tg}(x)^2\,dx,$$

(d)
$$\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx,$$

(e)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)^2}{1+\sin(x)^2}\,dx.$$

Zadanie 4 Policz następujące granice:

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)-x}{\operatorname{tg}^3(x)}.$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

Zadanie 5 Znajdź wartość następującej sumy:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Wskazówka. Rozważ funkcję:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Jaka naturalna operacja pozwoliłaby nam pozbyć się $2n+1$ w mianowniku (mnożenie przez x^k, całkowanie ...?). Następnie należy skorzystać ze wzoru na szereg geometryczny. Bonusowe punkty za uzasadnienie że kroki te są legalne, dyskusję kwestii promienia zbieżności, etc. [1]

Zadanie 6 Różniczkując po parametrze – co w angielskiej literaturze nazywa się często sztuczką Feynmana [2] – oblicz następujące całki. Bonusowe punkty za uzasadnienie, dlaczego operacja wchodzenia z pochodną pod całkę jest legalna – używając np. twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej dla pochodnych[3].

(a)
$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)}dx \quad a \geqslant 0,$$

[1] Wartość tej sumy jest znana i jest szeroko opisana w źródłach – w razie problemów zachęcamy zajrzeć do internetu!

[2] `https://zackyzz.github.io/feynman.html`

[3] `https://www.maths.tcd.ie/~richardt/MA2224/MA2224-ch4.pdf`, str 6.

(b)

$$F(a) = \int_{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}^{1} \frac{\arctan(ax)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a > 1.$$