Jak całki liczyć, żeby się nie przeliczyć?

Zadanie kwalifikacyjne
WWW20

Jakub Halfar

30 kwietnia 2024

1 Wstęp

Przygotowałem zestaw zadań, którego celem jest zaznajomienie z zagadnieniami, których będziemy potrzebować i używać na samych warsztatach. Zachęcam do spróbowania swoich sił w jak największej ilości zadań - niektóre są zdecydowanie prostsze od innych.

Żeby się zakwalifikować nie ma konieczności, aby zrobić wszystko. Jeśli masz tylko fragment zadania, to śmiało wyślij też częściowe rozwiązanie.

Forma, w jakiej powinny być spisane rozwiązania, jest dowolna, choć bardzo proszę, żeby była w miarę czytelna :) Same rozwiązania zaś należy wysłać przez stronę warsztatów.

Zapraszam też do zapoznania się z warsztatami "Analityczne zoo" - część programu się pokrywa, jak np. metoda Feynmana czy wykorzystanie szeregów Taylora.

W razie jakichkolwiek pytań, wątpliwości czy zauważonych błędów zapraszam do kontaktu: jakubhalfar@student.agh.edu.pl

Powodzenia!

2 Trochę przydatnej teorii

2.1 Całka oznaczona

Całkę oznaczoną możemy interpretować jako wypadkowe pole powierzchni pod krzywą $y = f(x)$ na przedziale $[a,\, b]$ (ujemne wartości funkcji f przyczyniają się do zmniejszenia wypadkowego pola). Definiujemy całkę oznaczoną jako:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

gdzie:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$
$$x_i = a + i\Delta x, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Jeżeli znamy funkcję pierwotną F dla funkcji f, to całkę oznaczoną możemy obliczyć, korzystając z podstawowego twierdzenia analizy matematycznej:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2.2 Całka nieoznaczona

Całką funkcji f nazywamy taką funkcję F, że $F'(x) = f(x)$. Funkcję f nazywamy **funkcją podcałkową**, a funkcję F **funkcją pierwotną**. Możemy to symbolicznie zapisać jako:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

gdzie C oznacza stałą całkowania.

Podstawowe zależności i wzory:

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$
$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$
$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$
$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

2.3 Podstawowe metody całkowania

1. Przekształcanie funkcji podcałkowej z pomocą algebry do takiej postaci, w której jesteśmy już w stanie zastosować znany wzór
2. Wykorzystanie tożsamości trygonometrycznych
3. **Całkowanie przez części**

   Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)] \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

4. **Całkowanie przez podstawienie**

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x) \,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int f(t) \,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x) \,\mathrm{d}x \\ x = a \implies t = g(a) \\ x = b \implies t = g(b) \end{vmatrix} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \,\mathrm{d}t$$

2.4 Liczby zespolone

Liczbę zespoloną z możemy zapisać w **postaci algebraicznej**:

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

gdzie i jest **jednostką urojoną** i ma następującą własność:

$$i^2 = -1$$

Podstawowe operacje na liczbach zespolonych:

- dodawanie
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

- odejmowanie
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

- mnożenie
$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

- dzielenie
$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\\&=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-(di)^2}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

- moduł
$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

- sprzężenie
$$\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$$

- część rzeczywista
$$\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(a+bi)=a$$

- część urojona
$$\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(a+bi)=b$$

Zachodzi własność:
$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$$

Po utożsamieniu liczby zespolonej $z=a+bi$ z wektorem $\vec{z}=(a,b)$ zaczepionym w początku układu współrzędnych na płaszczyźnie otrzymujemy **postać trygonometryczną**:
$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
gdzie φ jest kątem, jaki tworzy wektor $\vec{z}$ z osią rzeczywistą.

W liczbach zespolonych prawdziwy jest **wzór Eulera**:
$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

Możemy zatem przedstawić dowolną liczbę zespoloną z w **postaci wykładniczej**:
$$z=|z|e^{i\varphi}$$

2.5 Funkcje hiperboliczne

Dla liczby zespolonej z możemy zdefiniować **sinus hiperboliczny**:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

oraz **cosinus hiperboliczny**:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

2.6 Funkcje specjalne

Funkcja gamma jest jednym z możliwych rozszerzeń pojęcia silni na zbiór liczb zespolonych. Dla liczb zespolonych o dodatniej części rzeczywistej definiujemy ją jako:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

2.7 Transformata Laplace'a

Transformatą Laplace'a funkcji f zdefiniowanej dla liczb rzeczywistych $t \geq 0$ nazywamy funkcję F zmiennej zespolonej s zadaną wzorem:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Warunkiem wystarczającym zbieżności powyższej całki jest to, aby funkcja f nie rosła szybciej niż funkcja wykładnicza, a więc:

$$\exists A, B, t_0\ \forall t > t_0 :\ |f(t)| \leq Ae^{Bt}$$

2.8 Szereg Taylora

Funkcję f, która jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna, możemy rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu z_0 zgodnie z następującym wzorem:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

gdzie $f^{(k)}(z_0)$ oznacza k-tą pochodną f w punkcie z_0 oraz przyjmujemy, że $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.

Szeregi Taylora dla wybranych funkcji:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

2.9 Szereg Laurenta

Szeregiem Laurenta funkcji zespolonej f wokół punktu z_0 nazywamy następujący szereg potęgowy, w którym dopuszczamy wyrazy o ujemnym wykładniku zmiennej z:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Szereg Laurenta jest uogólnieniem szeregu Taylora.

3 Zadania

Zadanie 1 (16 pkt) Oblicz całki nieoznaczone:

1. $$\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

2. $$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \, \mathrm{d}x$$

3. $$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, \mathrm{d}x$$

4. $$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$$

5. $$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

6.

$$\int \frac{1}{(x-3)^7}\,\mathrm{d}x$$

7.

$$\int \frac{x-5}{x^2-10x+29}\,\mathrm{d}x$$

8.

$$\int \frac{1}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x$$

Zadanie 2 (6 pkt) Oblicz całki oznaczone:

1.

$$\int_0^{\pi} x(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

2.

$$\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

3.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \lfloor \ln x \rfloor\,\mathrm{d}x$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ - funkcja podłogi

Zadanie 3 (4 pkt) Oblicz następującą granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

Zadanie 4 (5 pkt) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \geq 0$$

Wskazówka. Jak rozbić całkę na inną całkę?

Zadanie 5 (5 pkt) Udowodnij następujący wzór na transformatę Laplace'a funkcji potęgowej t^{α}:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

Wskazówka. W jaki sposób można przekształcić funkcję podcałkową?

Zadanie 6 (5 pkt) Wyprowadź wzór na transformatę Laplace'a funkcji wykładniczej:

$$f(t) = e^{at}$$

Jakie ograniczenia musi spełniać stała a, aby transformata była zbieżna?

Zadanie 7 (4 pkt) Korzystając ze wzoru Eulera, wyprowadź wzór na $\sin(z)$ oraz $\cos(z)$ wyrażone jako funkcje zmiennej $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 8 (6 pkt) Wyprowadź wzór na transformatę Laplace'a funkcji $\sin(\omega t)$ oraz $\cos(\omega t)$.

Wskazówka. Przydatne mogą się okazać wyniki z dwóch poprzednich zadań, aby zaoszczędzić trochę obliczeń.

Zadanie 9 (6 pkt) Udowodnij następujące tożsamości:

a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x$$

b)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x$$

c)
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Zadanie 10 (5 pkt) Pokaż, że znane przybliżenie liczby $\pi \approx \frac{22}{7}$ szacuje ją z nadmiarem, czyli że:
$$\pi < \frac{22}{7}$$
W tym celu skorzystaj z następującej całki:
$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
Wskazówka. Jak spowodować, żeby stopień licznika był mniejszy niż mianownika?

Zadanie 11 (8 pkt) Znajdź wartość współczynnika a_{-1} w rozwinięciu w szereg Laurenta wokół punktu $z = z_0$:

1.
$$f(z) = \frac{e^z}{z^4}, \quad z_0 = 0$$

2.
$$f(z) = \frac{\sinh(z)e^z}{z^5}, \quad z_0 = 0$$

3.
$$f(z) = \frac{\cos z}{z+2}, \quad z_0 = -2$$

4.
$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - z}, \quad z_0 = 1$$

Wskazówka. Wykorzystaj szeregi Taylora