Zadania kwalifikacyjne

Mieszko Zimny

Zadanie należy wysłać przez stronę warsztatów do dnia 26 maja. Nie trzeba robić wszystkich zadań (niektóre są zdecydowanie trudniejsze), ale z pewnością pomocne będzie pomyślenie nad wszystkimi. Warto wysyłać nawet częściowe rozwiązania, na pewno to uwzględnię. Poza tym, w odpowiedzi na każde rozwiązania postaram się wysłać listę szczegółowych uwag, jeżeli pozostanie czas, będzie można potem wysyłać kolejne wersje swoich rozwiązań. Zachęcam, aby w przypadku jakichkolwiek wątpliwości pisać na m.zimny2@student.uw.edu.pl.

1 Topologia

Niech X będzie niepustym zbiorem. Rodzinę $\mathcal{T}$ podzbiorów X nazywamy **topologią**, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

1. pusty zbiór oraz cała przestrzeń należą do $\mathcal{T}$: $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;
2. suma dowolnej liczby zbiorów z $\mathcal{T}$ należy do $\mathcal{T}$: jeżeli $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, to $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
3. przecięcie skończenie wielu zbiorów z $\mathcal{T}$ należy do $\mathcal{T}$: jeżeli $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, gdzie $|I| < \infty$, to $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

W takim przypadku parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy **przestrzenią topologiczną**. W praktyczym zapisie często pomijamy rodzinę $\mathcal{T}$, jeżeli jest jasna z kontekstu i mówimy po prostu o przestrzeni topologicznej X. Elementy $\mathcal{T}$ nazywamy **zbiorami otwartymi w** X. Dopełnienia zbiorów otwartych nazywamy **zbiorami domkniętymi**.

Najważniejszy z naszego punktu widzenia przykład jest następujący. Niech $X = \mathbb{R}$, za $\mathcal{T}$ przyjmujemy rodzinę wszystkich zbiorów, które są sumami dowolnej liczby przedziałów otwartych. Topologię tę czasami nazywamy topologią euklidesową. Od tej pory, kiedy mówimy o "przestrzeni topologicznej $\mathbb{R}$" mamy na myśli $\mathbb{R}$ z tą właśnie topologią.

Zadanie 1. Ustal, czy $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ jest przestrzenią topologiczną, gdy:

a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$;

b) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, tzn. $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkim podzbiorów $\mathbb{R}$;

c) $\mathcal{T}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów zawierających 0;

d) $\mathcal{T}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów niezawierających 0;

e) $\mathcal{T}$ składa się ze wszystkich podzbiorów zawierających 0 oraz $\emptyset$;

f) $\mathcal{T}$ składa się ze wszystkich podzbiorów niezawierającyh 0 oraz $\mathbb{R}$.

Mówimy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ ma **własność Hausdorffa** lub **jest Hausdorffa**, jeżeli dla dowwolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieją zbiory otwarte U, V takie, że $x \in U$, $y \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$ (innymi słowy, dowolne dwa punkty można rozdzielić zbiorami otwartymi). Na przykład $\mathbb{R}$ z topologią euklidesową jest Hausdorffa.

Zadanie 2. Które spośród przestrzeni z Zadania 1. mają własność Hausdorffa?

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest **ciągła**, jeżeli dla dowolnego zbioru V otwartego w Y, zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty w X. Dla dowolnego podzbioru $A \subseteq X$ **domknięciem** A (oznaczenie $\overline{A}$) nazywamy przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych w X zawierających A. Podzbiór A nazywamy **gęstym w** X, jeżeli $\overline{A} = X$.

Zadanie 3. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi, $A \subseteq X$ gęstym podzbiorem, a $f, g : X \to Y$ funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że Y ma własność Hausdorffa. Pokaż, że jeżeli $f|_A = g|_A$, to $f = g$ (czyli funkcja ciągła jest wyznaczona przez swoje wartości na gęstym podzbiorze). Pokaż, że nie musi to być prawda, jeżeli Y nie jest Hausdorffa.

2 Algebra

Podstawowym dla nas pojęciem będzie pojęcie pierścienia. **Pierścieniem** nazywamy zbiór R wraz z dwoma działaniami dwuargumentowymi na nim nazywanymi zazwyczaj dodawaniem i mnożeniem, i oznaczanymi dokładnie tak samo jak zwykłe dodawanie i mnożenie, które spełniają następujące warunki:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ dla dowolnych $a, b, c \in R$ (łączność dodawania);
2. istnieje element $0 \in R$ (nazywany zerem pierścienia) taki, że $0 + a = a + 0$ dla dowolnego $a \in R$;
3. dla każdego $a \in R$ istnieje element $b \in R$ (nazywany elementem przeciwnym do a) taki, że $a + b = 0$ (często oznaczamy b przez $-a$);
4. $a(bc) = (ab)c$ (łączność mnożenia);
5. $a(b + c) = ab + ac$ (lewostronna rozdzielność mnożenia względem dodawania);
6. $(a + b)c = ab + ac$ (prawostronna rozdzielność mnożenie względem dodawania).

Ta definicja może wyglądać na dość skomplikowaną, ale jest łatwa do używania w praktyce. Należy myśleć po prostu, że pierścień to zbiór elementów, które możemy dodawać, odejmować i mnożyć, ale niekoniecznie dzielić (nie każdy element musi mieć odwrotność). Jeżeli dodatkowo zachodzi warunek

7. $ab = ba$ dla dowolnych $a, b \in R$,

to pierścień nazywamy **pierścieniem przemiennym**, a jeżeli

7'. istnieje element $1 \in R$ (nazywany jedynką pierścienia) o tej własności, że $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ dla każdego $a \in R$

to pierścień nazywamy **pierścieniem z jedynką**. Będą nas interesować wyłącznie pierścienie przemienne z jedynką, a więc od tej pory przjmujemy konwencję, iż **słowo "pierścień" oznacza dla nas domyślnie pierścień przemienny z jedynką**.

Zadanie 4. Które z poniższych struktur są pierścieniami?

a) zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem (przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$)

b) zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem

c) zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo 6

Podzbiór I pierścienia R nazywamy **ideałem**, jeżeli

1. dla każdych $a, b \in I$ mamy $a + b \in I$ (I jest zamknięty ze względu na dodawanie),
2. dla każdego $a \in I$ i $b \in R$ mamy $ab \in I$.

Przykłady ideałów to np. $\{0\}$ (nazywany ideałem trywialnym) oraz cały pierścień R (nazywany ideałem niewłaściwym, pozostałe ideały nazywamy właściwymi). Ideał I nazywamy **pierwszym**, jeżeli dla dowolnych $a, b \in R$ z należenia $ab \in I$ wynika, że $a \in I$ lub $b \in I$. Ideał I nazywamy **maksymalnym**, jeżeli jest właściwy i nie jest zawarty w żadnym innym ideale właściwym.

Zadanie 5. Pokaż, że ideał I jest niewłaściwy wtedy i tylko wtedy, gdy należey do niego jakiś element odwracalny w R (tzn. takie $a \in R$, dla którego istnieje $b \in R$ takie, że $ab = 1$).

Jednym z najważniejszym dla nas przykładów pierścieni będą pierścienie rzeczywistych funkcji ciągłych na przestrzeniach topologicznych. Dokładniej, dla przestrzeni topologicznej X możemy rozważyć pierścień $C(X)$ składający się z funkcji ciągłych $X \to \mathbb{R}$ (z topologią euklidesową oczywiście) ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem funkcji po wartościach (sprawdź, że istotnie jest to pierścień, jeżeli nie jest to dla ciebie oczywiste).

Zadanie 6. W tym zadaniu rozważamy pierścień $C(\mathbb{R})$.

a) Pokaż, że dla dowolnego ustalonego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ jest ideałem maksymalnym w $C(\mathbb{R})$.

b) Czy zbiór złożony z funkcji zbieżnych do zera w nieskończoności jest ideałem w $C(\mathbb{R})$? Jeżeli tak, to czy jest ideałem pierwszym/maksymalnym?

c) Czy zbiór funkcji równych zero dla dostatecznie dużych x jest ideałem w $C(\mathbb{R})$? Jeżeli tak, to czy jest ideałem pierwszym/maksymalnym?

Niech $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (okrąg) z topologią euklidesową dziedziczoną z płaszczyzny, tzn. podzbiór S^1 jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest przecięciem pewnej rodziny kół otwartych na płaszczyźnie z S^1. Można pokazać (dokładnie tak samo, jak w powyższym zadaniu), iż dla ustalonego $x \in S^1$ zbiór $\mathfrak{m}_x = \{f \in C(S^1) : f(x) = 0\}$ jest ideałem maksymalnym w $C(S^1)$.

Zadanie 7*. Odwróć powyższe stwierdzenie w następujących krokach.

1. Niech $\mathfrak{n}$ będzie ideałem maksymalnym w $C(S^1)$ i załóżmy, że $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}_x$ dla pewnego x. Pokaż, że istnieje $f \in \mathfrak{n}$ taka, że $f(x) \neq 0$ i $f(y) \geq 0$ dla dowolnego $y \in S^1$.
2. Niech $\mathfrak{n}$ będzie ideałem maksymalnym takim, że $\mathfrak{n} \notin \{\mathfrak{m}_x : x \in S^1\}$. Pokaż, że istnieje $f \in \mathfrak{n}$ taka, że $f(y) > 0$ dla dowolnego $y \in S^1$.
3. Wywnioskuj, że $\mathfrak{n} = C(S^1)$, więc nie jest ideałem maksymalnym. A zatem ideały maksymalne w $C(S^1)$ odpowiadają w naturalny sposób punktom S^1!

Wskazówka: Najprawdopodobniej pomocny będzie następujący fakt, który profesjonalnie nazywamy zwartością S^1, na który można powoływać się bez dowodu: jeżeli $\{U_i : i \in I\}$ jest rodziną zbiorów otwartych w S^1 taką, że $\bigcup_{i \in I} U_i = S^1$, to istnieje skończony podzbiór $J \subseteq I$ taki, że $\bigcup_{j \in J} U_j = S^1$ (z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone).