Zadania na WWW20

Janczar Knurek

A. D. 2024

Wstęp

Niniejszy dokument zawiera zadania i przydatne informacje związane z warsztatami „Twierdzenie Gödla i teoria modeli”. Wypełnione zadania proszę wysyłać poprzez formularz na stronie warsztatów. Wszelkie pytania i wątpliwości co do treści zadań, a także prośby o poradę proszę kierować na adres podany na stronie warsztatów.

Zasady

Rozumowania są istotną częścią zadania - ich obecność jest konieczna aby rozwiązanie zostało ocenione jako poprawne. Im więcej podpunktów rozwiązanych - tym lepiej, proszę jednak się nie przerażać jeśli któregoś z podpunktów nie będzie potrafiło się rozwiązań, lub okaże się niejasny - służę wtedy radą i wyjaśnieniem. Dodatkowo warto zwrócić uwagę że zajęcia dotyczą formalizmów i znaczkologii wiec warto się postarać aby wysłane rozwiązania trzymały się takiego ducha.

Rozwiązania można wysyłać w dowolnym formacie, byle czytelnym - w wypadku zdjęć/skanów pisma odręcznego proszę o krytyczną ocenę swoich zdolności kaligraficznych, pozwoli nam to uniknąć niezręcznych sytuacji w których wzajemne zrozumienie będzie wymagało wymiany wielu maili.

Uwaga

Zestaw zawiera wszystkie zadania, zostanie jednak w najbliższych dniach uzupełniony o dodatkowe informacje pomocne w ich rozwiązaniu. Zaktualizowany zestaw zostanie wrzucony zamiast tego na stronę warsztatów.

Rachunek kwantyfikatorów

Zadanie 1. Które zdanie jest silniejsze Czy podane pary zdań są równoważne? Jeśli nie to które wynika z którego?

1. $\exists_x(\phi(x) \vee \psi(x))$ vs. $(\exists_x \phi(x)) \vee (\exists_x \psi(x))$
2. $\exists_x(\phi(x) \wedge \psi(x))$ vs. $(\exists_x \phi(x)) \wedge (\exists_x \psi(x))$
3. $\exists_x \phi(x)$ vs. $\exists_y \phi(y)$
4. $\exists_x \forall_y \phi(x, y)$ vs. $\forall_y \exists_x \phi(x, y)$

Indukcja matematyczna

Zadanie 2. Ulubiony dowód Przedstaw swój ulubiony (poprawny!) dowód korzystający z indukcji matematycznej.

Zadanie 3. Błędny dowód Poniżej znajduje się dowód nieprawdziwego twierdzenia brzmiącego „Wszystkie funkcje ze zbioru skończonego są stałe”. Znajdź błąd w dowodzie:

Dowód przeprowadzimy korzystając z indukcji matematycznej. W szczególności dla każdego n wykażemy zdanie „Wszystkie funkcje określone na zbiorze n elementowym są stałe”

- Dla zbiorów jednoelementowych zdanie jest trywialnie prawdziwe, każda funkcja określona na zbiorze jednoelementowym jest stała. Wykazaliśmy więc bazę indukcji.
- Niech X będzie zbiorem $n+1$ elementowym zaś f pewną funkcją na X. Przedstawmy $X = X' \cup \{x_0\}$ aby X' był n elementowy.
- Z założenia indukcyjnego mamy f - stałe na X' czyli wszystkie elementy X' mają tą samą wartość. Weźmy teraz $x_1 \in X'$ i zmieńmy je miejscami z x_0 tzn $X = X'' \cup \{x_1\}$. Dalej f stałe na X'' z założenia indukcyjnego.
- f przyjmuje więc tą samą wartość na wszystkich elementach X, jest więc stała - wykazaliśmy krok indukcyjny.

Arytmetyka Peano

Arytmetyka Peano to system formalizujący własności liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Składa się on z następujących pojęc pierwotnych:

- Stałej 0.
- Pojęcia następnika liczby n oznaczanego przez Sn.

Dalej mamy następujące aksjomaty

- $\forall_n Sn = Sm \Rightarrow n = m$ (liczby są równe jeśli ich następniki są równe)
- $\neg \exists_n Sn = 0$ (zero nie jest następnikiem żadnej liczby)
- Jeśli $P \subset \mathbb{N}$ takim że:
  1. $0 \in P$
  2. $\forall_n n \in P \Rightarrow Sn \in P$

  to $P = \mathbb{N}$ (aksjomat indukcji)

Poza potężnym potencjałem dowodowym indukcja pozwala nam również definiować różnorakie funkcje na liczbach naturalnych przy pomocy tzw definicji indukcyjnych.

Dodawanie w arytmetyce Peano można zdefiniować tak:

- $\forall_n 0 + n = n$
- $\forall_n \forall_m Sn + m = S(n + m)$

Zadanie 4. Dowody w arytmetyce Peano Wykaż następujace fakty o arytmetyce Peano

1. $SS0 + SS0 = SSSS0$ (znane również jako $2 + 2 = 4$)
2. $(\forall_x \forall_y x \leqslant y \Rightarrow Sx \leqslant Sy) \Rightarrow \forall_n \forall_m \forall_k n \leqslant m \Rightarrow (n + k) \leqslant (m + k)$

3. $\forall_n n \neq 0 \Rightarrow \exists_m n = Sm$ (każda niezerowa liczba jest następnikiem)

4. $\forall_n n + 0 = 0$

5. $\forall_n \forall_m Sn + m = n + Sm$

6. $\forall_n \forall_m n + m = m + n$ (wskazówka - użyj poprzedniego podpunktu)

Zadanie 5. Więcej definicji Zaproponuj indukcyjne definicje odejmowania i mnożenia (zwróć uwagę że odejmowanie nie jest zdefiniowane dla wszystkich par liczb naturalnych). Dla każdego z nich udowodnij jedną wybraną własność.