Informacje wstępne

Wszystkie zadania są punktowane po 10 pkt. Proszę o dokładne uzasadnienie swoich odpowiedzi i rozwiązań. Rozwiązania należy przesłać przez stronę internetową warsztatów. Żeby zakfalifikować się na warsztaty nie trzeba zrobić wszystkich zadań (niektóre mogą okazać się łatwe a inne dość trudne). Zachęcam jednak do pomyślenia nad każdym zadaniem i wysyłania nawet częściowych rozwiązań/pomysłów, za które również można dostać punkty.
W razie pytań lub trudności związanych z zadaniami zapraszam do kontaktu na maila **pg429427@students.mimuw.edu.pl**

Przydatne definicje oraz oznaczenia

Definicja. *W zadaniach zbiór liczb naturalnych rozumiemy jako* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Definicja. *Różnicą symetryczną zbiorów* A *i* B *(oznaczenie* $A \triangle B$*) nazywamy*

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Definicja. *Dla zbioru* X *na którym zdefiniowane jest działanie dodawania (+) oraz odejmowania (−) dla zbiorów* $A \subseteq X, B \subseteq X$ *definiujemy:*

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Definicja. *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy surjekcją (funkcją "na") gdy*

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \quad f(x) = y$$

Definicja. *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy injekcją (funkcją różnowartościową lub 1-1) gdy*

$$\forall_{a,b \in X} \quad (\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)\ )$$

Definicja. *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy bijekcją jeśli jest jednocześnie surjekcją oraz injekcją.*

Definicja. *Zbiorem potęgowym zbioru* X *(oznaczenie* $\mathcal{P}(X)$*) nazywamy zbiór wszystkich podzbiorów* X*. To znaczy, że dla dowolnego zbioru* A *zachodzi*

$$A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subseteq X$$

Zadania

Zadanie 1. *W pewnym regionie, w którym obecnie nie ma żadnego miasta planowana jest budowa* n *miast. Pomiędzy dowolnymi dwoma miastami będzie dokładnie jedna droga. Każda droga będzie koloru czarnego albo czerwonego. Wyznaczyć najmniejsze* $n \in \mathbb{N}$ *dla którego będziemy mieć pewność, że prawdziwe będzie zdanie: "istnieją takie 3 miasta, pomiędzy którymi są tylko drogi czarne lub istnieją takie 3 miasta pomiędzy którymi są tylko drogi czerwone."*

Zadanie 2. *Czy dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$? Jeśli tak to udowodnij równość, a jeśli nie to podaj przykład zbiorów A, B dla których równość nie zachodzi.*

Zadanie 3. *Niech* $A = [0,1], \quad B = [\frac{1}{2}, 2), \quad C = [-1,1) \cup \{3\}$. *Wyznacz zbiór*

$$((A \triangle B) + C) \cap ((A \triangle C) - B)$$

Zadanie 4. *Dla $m, n \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(n) = m\}$ oraz niech $B_{n,m} = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : g(n) \geq |m - n|\}$. Dla ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}$ wyznaczyć wszystkie $m \in \mathbb{N}$ dla których zachodzi $A_{n_0,m} \cap B_{n_0,m} = \varnothing$*

Zadanie 5. *Wykaż że jeśli $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ są bijekcjami to $h : X \to Z$ taka, że $\forall_{x \in X} \quad h(x) = g(f(x))$ również jest bijekcją.*

Zadanie 6. *Wykaż że jeśli dla danych zbiorów X, Y istnieje funkcja $f : X \to Y$ taka, że f jest bijekcją to istnieje również funkcja $g : Y \to X$ taka, że g jest bijekcją.*
Wskazówka: *Czy istnieje odwzorowanie odwrotne do f? Jeśli tak to jakie ma własności?*

W zadaniach 7-10 należy podać bijekcję pomiędzy zbiorami A oraz B poprzez zdefiniowanie funkcji $f : A \to B$ albo funkcji $g : B \to A$, która jest bijekcją. Należy uzasadnić, dlaczego zdefiniowana przez nas funkcja jest bijekcją. (Wskazówka: przy rozwiązywaniu zadań 7-10 można (ale nie trzeba) skorzystać z zadań (5) oraz (6) np. poprzez wymyślenie pewnego zbioru C dla którego łatwiej nam będzie znaleźć bijekcję z A w C oraz z C w B a następnie skorzystać z zadania (5) lub przez wskazanie bijekcji z A w C oraz z B w C a następnie sprytnie skorzystać z zadania (6))

Zadanie 7. $A = \mathbb{N}$, $\quad B = \mathbb{N} \setminus \{2024\}$

Zadanie 8. $A = [0,3)$, $\quad B = (-1,1)$

Zadanie 9. $A = \{0,1\}^4$, $\quad B = \mathcal{P}(\{2,5,9,2024\})$

Zadanie 10. $A = \mathbb{R}$, $\quad B = (-7,2) \cup \{\pi\}$