Topologia to patologia

Warsztaty by: Marta Kosz&Magdalena Grabka

To co zazwyczaj rozumiemy jako mierzenie odległości nazywamy metryką euklidesową, nie jest to jednak jedyny sposób w jaki możemy mierzyć! Nasze zadania kwalifikacyjne mają Ci pokazać inne metryki i ich podstawowe właściwości. Wszystkie potrzebne definicje są w tym pliku, ale nie przejmuj się, jeżeli nie będziesz w stanie ich od razu zrozumieć. Warto samemu poszukać dodatkowych wyjaśnień (albo poczytać *Fajny skrypt*), zawsze można też nas o coś dopytać. Pamiętaj, że nie musisz zrobić wszystkich zadań, żeby zakwalifikować się na warsztaty! Warto też wysłać rozwiązania przed końcem terminu, wtedy będziesz mieć jeszcze szanse je poprawić po otrzymaniu naszych uwag. **W razie jakichkolwiek pytań napisz do: koszmartamk@gmail.com lub magdalena.grabka000@gmail.com**

Metryka:

Funkcja $d : X^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ jest metryką jeżeli:

- $(\forall x, y \in X)(d(x,y) = 0 \iff x = y)$ rozróżnia argumenty
- $(\forall x, y \in X)(d(x,y) = d(y,x))$ jest symetryczna
- $(\forall x, y, x \in X)(d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z))$ spełnia nierówność trójkąta

Przestrzeń metryczna:

Para (X, d_X) (gdzie X to nasz zbiór, a d_X to metryka na tym zbiorze)

Kula:

$B_r(x) = \{y \in X : \ d_X(x,y) < r\}$ (która ma środek x i promień r)

Zbieżność ciągu:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(d_X(x_n, x) < \epsilon)$

Zbiór otwarty:

$U \subseteq X$ jest otwarty $\iff (\forall x \in U)(\exists r > 0)(B_r(x) \subseteq U)$

$U_{\text{otw}} \iff U$ jest sumą kul

- Sumy zbiorów otwartych też są otwarte
- *skończone* przekroje zbiorów otwartych też są otwarte

Zbiór domknięty:

$F \subseteq X$ jest domknięty $\iff (\forall (x_n) \in F^{\mathbb{N}}) \Big((\exists x \in X)(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x) \implies x \in F \Big)$

(każda granica ciągu elementów F też jest w F)

$U_{\text{otw}} \iff U^c_{\text{domk}}$ (gdzie X dopełnienie zbioru otwartego to zbiór domknięty)

Specjalne zbiory dla $A \subseteq X$, X - przestrzeń metryczna:

Wnętrze A: $\text{Int}(A) = \{x \in A : (\exists r > 0)(B_r(x) \subseteq A)\}$

Domknięcie A: $\overline{A} = \{x \in X : (\exists x_n \in A^{\mathbb{N}})(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x)\}$

Brzeg A: $\text{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}A$

$A_{\text{otw}} \iff A = \text{Int}(A)$ (zbiór otwarty jest swoim wnętrzem)

$A_{\text{domk}} \iff A = \overline{A}$ (zbiór domknięty jest swoim domknięciem)

Uwaga: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ (w naszych zadaniach zawsze n=2) Natomiast **0** to początek układu współrzędnych (0,..,0) (czyli dla n=2 (0,0))

Zadanie 1 (15 pkt) Sprawdź czy podany sposób mierzenia „odległości" spełnia definicję metryki w $\mathbb{R}^2$:

- Metryka euklidesowa: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$
- Metryka centrum: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| & \text{jeśli } \mathbf{0}, \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{y} \text{ są współliniowe,} \\ \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| & \text{(tzn. suma odległości } \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{y} \text{ od } \mathbf{0}\text{) w przeciwnym razie.} \end{cases}$
- Metryka rzeki: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| & \text{jeśli } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |x_1-y_1| + |y_2| & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$
- Bezwzględna: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1 - y_1|$
- Sinus (tutaj sprawdź dla $\mathbb{R}$ zamiast $\mathbb{R}^2$): $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\sin(\mathbf{x}) - \sin(\mathbf{y})|$
- Zero: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$

Zadanie 2 (5 pkt) Narysuj kule w $\mathbb{R}^2$ o środku $(0,0)$ i promieniu 2 w podanych metrykach:

- Metryka euklidesowa
- Metryka rzeki
- Metryka miasta/taksówkowa: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- Metryka dyskretna: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ 1 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$
- Metryka supremum: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_i |x_i - y_i|$ (tzn. odległością jest supremum odległości we wszystkich wymiarach)

Zadanie 3 (20 pkt) Znajdź wnętrze, domknięcie i brzeg następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową (nie musisz koniecznie napisać rozwiązania jako zbiór, wystarczy go opisać słowami + jeśli się da to narysować):

- $A = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$
- $B = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
- $C = \{x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$
- $D = \{x, y \in \mathbb{R} : y = 2x\}$
- $E = \{x, y \in (0,\infty)^2 : y = \frac{1}{\sin(x)}\}$

Powtórz polecenie dla metryki centrum

Zadanie 4 (10 pkt) Udowodnij, że ciąg $(\mathbf{x}_n)$ punktów płaszczyzny (tzn. $\mathbb{R}^2$) jest zbieżny do $\mathbf{x}$ w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w metryce maksimum.
(czyli $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\left(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \dots, |x_n-y_n|\right)$)

Zadanie 5 (10 pkt) Uzasadnij, że nie istnieje ciąg $(\mathbf{x}_n)$ elementów $\mathbb{R}^2$, który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej. Podaj przykład ciągu, który jest zbieżny w metryce euklidesowej (na $\mathbb{R}^2$), ale nie jest w metryce centrum.