Informacje wstępne

Wszystkie zadania są punktowane po 10 pkt. Proszę o dokładne uzasadnienie swoich odpowiedzi i rozwiązań. Rozwiązania należy przesłać przez stronę internetową warsztatów. Żeby zakfalifikować się na warsztaty nie trzeba zrobić wszystkich zadań (niektóre mogą okazać się łatwe a inne dość trudne). Zachęcam jednak do pomyślenia nad każdym zadaniem i wysyłania nawet częściowych rozwiązań/pomysłów, za które również można dostać punkty.
W razie pytań lub trudności związanych z zadaniami zapraszam do kontaktu na maila **pg429427@students.mimuw.edu.pl**

Przydatne definicje oraz oznaczenia

Oznaczenie 1. *Dla funkcji $f : X \to X$ przez $f^n(x)$ będziemy oznaczać n-krotne złożenie funkcji f w punkcie x. tzn.*

$$f^n(x) := \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n-razy}(x))\ldots)$$

Definicja 1. *Punktem stałym funkcji $f : X \to X$ nazywamy taki $x \in X$, że $f(x) = x$.*

Definicja 2. *Punkt x jest punktem okresowym funkcji f jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$, taki że zachodzi*

$$f^n(x) = x.$$

Definicja 3. *Powiemy, że okres podstawowy punktu okresowego x wynosi n jeśli*

$$f^n(x) = x \text{ oraz } f^k(x) \neq x \text{ dla } k < n.$$

Definicja 4. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją oraz niech $A \subseteq X$. Obrazem zbioru A przy funkcji f nazywamy zbiór $f[A]$, który definiujemy jako*

$$f[A] := \{y \in Y : \underset{x \in A}{\exists} f(x) = y\} = \{f(x) : x \in A\}.$$

Stwierdzenie 1. ***(Własność Darboux)***
Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz dla pewnych liczb $x, y \in [a,b]$ takich, że $x < y$ zachodzi

$$f(x) < c < f(y) \text{ albo } f(x) > c > f(y)$$

dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ to istnieje $z \in (x,y)$, taki że $f(z) = c$.

Zadanie 1. *Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie dana wzorem $f(x) = (x-1)^2$. Sprowadź $f^2(x)$ do postaci*

$$f^2(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz $a_0, a_1, \ldots a_k \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. *Uzasadnij, że dla każdej funkcji ciągłej $f : [0,1] \to [0,1]$ istnieje punkt stały f.*

Zadanie 3. *Podać przykład funkcji ciągłej* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$*, która nie posiada żadnego punktu stałego oraz dodatkowo zachodzi* $f[(0,1)] = (0,1)$*.*

Zadanie 4. *Podać przykład funkcji* $f : [0,1] \to [0,1]$*, takiej że istnieje dokładnie jeden punkt stały* $x_0 \in [0,1]$ *oraz dla każdego* $x \in [0,1]$ *jeśli* $x \neq x_0$ *to* $f^2(x) = x$*.*

Zadanie 5. *Niech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie dana wzorem*

$$f(x) = \left|x^2 - 2\right| + 2x - 2.$$

Znajdź wszystkie punkty stałe funkcji f*.*

Zadanie 6. *Niech* $f : [0,1] \to [0,1]$ *będzie określona wzorem* $f(x) := \max\{\frac{5}{32}, 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\}$*. Udowodnij, że* $x_0 = \frac{1}{2}$ *jest punktem okresowym o okresie podstawowym równym* 5*.*

Zadanie 7. *Niech* $f(x) = \frac{1}{1-x}$*. Wyznaczyć dziedzinę funkcji* $g(x) := f^3(x)$ *oraz udowodnić, że dla każdego* x *należącego do dziedziny* g *zachodzi* $g(x) = x$*.*

Zadanie 8. *Dla funkcji* $f : [0,3] \to [0,3]$ *określonej wzorem*

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 2, \\ x-2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

wyznaczyć punkty o okresie podstawowym 2 *oraz wszystkie punkty o okresie podstawowym* 3*.*

Zadanie 9. *Niech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą, taką że dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $f^2(x) = x$*. Udowodnij, że funkcja* f *ma co najmniej jeden punkt stały.*

Zadanie 10. *Niech* $f, g : [0,1] \to [0,1]$ *będą funkcjami ciągłymi, takimi że* $f(0) = 0 = g(1)$ *oraz* $f(1) = 1 = g(0)$*. Uzasadnij, że istnieje taki* $x \in [0,1]$ *dla którego zachodzi* $f(x) = g(x)$