

Teoria Mnogości

Zadania Kwalifikacyjne
WWW 21

Piotr Horodecki

Wstęp

Przed zadaniami będą przedstawione definicje i własności przydatne do ich rozwiązania, jest ich dużo, ale większość z nich powinna już być znana. Niektóre z definicji są uproszczone na potrzeby zadań i zostaną rozwinięte na zajęciach.

Rozwiązania można wysyłać w dowolnej formie tak długo jak są czytelne.

Nie trzeba rozwiązać wszystkich zadań, jednakże polecam spróbować rozwiązać wszystkie i skontaktować się w razie problemów.

W razie jakichkolwiek pytań zachęcam do kontaktu, poprzez środki na stronie warsztatów.

Definicje do zadań

Formuła zdaniowa składa się z:

- **zmiennych zdaniowych** $p, q, r, \dots$, reprezentujących zdania proste, które mają wartość 0 lub 1
- **spójników logicznych** $\vee, \wedge, \neg, \implies, \iff$
- **symboli dodatkowych** $(,), [,], \dots$,

Tautologia (prawo logiczne) to formuła, która jest spełniona dla dowolnego wartościowania zmiennych zdaniowych. Przykładami tautologii są:

- Prawo podwójnego przeczenia: $p \iff \neg(\neg p)$
- Prawo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$
- Prawo przemienności: $p \vee q \iff q \vee p$
- Idempotentność: $p \wedge p \iff p$
- Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy: $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Podobnie jest rozdzielność alternatywy względem koniunkcji
- Prawa de Morgana:
 - $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$
 - $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$
- Implikacja: $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$
- Kontrapozycja: $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$

Funkcją zdaniową nazywamy wyrażenie $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, która staje się zdaniem po podstawieniu wartości pod $x_1, x_2, \dots, x_n$

Wykresem funkcji zdaniowej nazywamy zbiór zmiennych, dla których zdanie jest prawdziwe. Wykres funkcji zdaniowej ϕ oznacza się jako $S(\phi)$. Jeśli w zdaniu występują kwantyfikatory to zmiennych kwantyfikowanych się nie pisze w wykresie.

Kwantyfikowaną funkcją zdaniową nazywamy, funkcję zdaniową, w której do "podstawienia" pod co najmniej 1. zmienną używamy kwantyfikatorów.

- Kwantyfikator ogólny $\forall$, dla każdego
- Kwantyfikator szczegółowy $\exists$, istnieje

Prawa rachunku funkcyjnego:

- Prawo Egzemplifikacji: $\forall x : \phi(x) \implies \exists x : \phi(x)$
- Prawa de Morgana:
 - $\neg(\exists x : \phi(x)) \iff \forall x : \neg\phi(x)$
 - $\neg(\forall x : \phi(x)) \iff \exists x : \neg\phi(x)$
- Prawo przestawiania kwantyfikatorów:
 - $\forall x : \forall y : \phi(x, y) \iff \forall y : \forall x : \phi(x, y)$
 - $\exists x : \exists y : \phi(x, y) \iff \exists y : \exists x : \phi(x, y)$
 - $\exists x : \forall y : \phi(x, y) \implies \forall y : \exists x : \phi(x, y)$
- W tym prawie kwantyfikator można zastąpić kwantyfikatorem ogólnym, a koniunkcję alternatywą $\forall x : (\phi(x) \wedge \psi) \iff (\forall x : \phi(x)) \wedge \psi$
- Prawa rozdzielności kwantyfikatorów:
 - $\forall x : (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff [(\forall x \phi(x)) \wedge (\forall x \psi(x))]$
 - $[(\forall x : \phi(x)) \vee (\forall x : \psi(x))] \implies \forall x : (\phi(x) \vee \psi(x))$
 - $\exists x : (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff [(\exists x \phi(x)) \vee (\exists x \psi(x))]$
 - $\exists x : (\phi(x) \wedge \psi(x)) \implies [(\exists x \phi(x)) \wedge (\exists x \psi(x))]$
- Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji:
 $\forall x : (\phi(x) \implies \psi(x)) \implies [(\forall x : \phi(x)) \implies (\forall x : \psi(x))]$

Zbiór - Będziemy używać aksjomatycznej definicji zbiorów, jest ona w większości dość intuicyjna, jak ktoś chce przeczytać więcej o aksjomatach można to zrobić w rozdziale 4. materiałów na stronie warsztatów.

Inkluzja: Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B ($A \subset B$) wtw., gdy: $\forall x (x \in A \implies x \in B)$

Istotne zawieranie: $A \subsetneq B \iff A \subset B \wedge A \neq B$

Suma: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Iloczyn: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Różnica: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Różnica symetryczna: $A \div B = \{x : x \in A \setminus B \vee B \setminus A\}$

Kilka praw działań na zbiorach:

- Prawa de Morgana - do udowodnienia w zadaniach:

$$- A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$- A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

- Rozdzielność sumy (iloczynu) względem iloczynu (sumy) - do udowodnienia w zadaniach:

$$- A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$- A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- $A \div B = \emptyset \iff A = B$

Rodziny zbiorów są zbiorami zbiorów i oznaczają się literami $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$

Suma zbiorów rodziny: $\bigcup \mathcal{A} = \{x : \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$

Iloczyn zbiorów rodziny: $\bigcap \mathcal{A} = \{x : \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$

Zadanie 1 – 4 pkt.

Znajdź wszystkie wartościowania zmiennych zdaniowych dla których podane formuły są prawdziwe

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge r)$
2. $[(p \vee q) \wedge (q \vee r)] \Rightarrow \neg r$
3. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$
4. $[(p \wedge \neg q) \vee r \vee t] \wedge [p \Rightarrow (q \wedge \neg(r \vee t))]$

Zadanie 2 – 4 pkt.

Udowodnić 4 wybrane tautologie spośród tych przedstawionych na początku rozdziału z definicjami.

Zadanie 3 – 6 pkt.

Znaleźć wykresy następujących funkcji zdaniowych, dla $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1. $\forall_x : x^2 > y$
2. $\exists_y : x^2 + y^2 = 9$
3. $\forall_y : x^2 + y^2 = 9$
4. $\exists_x : \forall_y : x \cdot y \geq z$
5. $\forall_x : \exists_y : x + y^2 = z$
6. $\forall_x : \exists_y : x \cdot y = z$

Zadanie 4 – 4 pkt.

Sprawdzić czy podane formuły są tautologiami:

1. $[\forall_x : (\phi(x) \vee \psi(x))] \implies [(\forall_x : \phi(x)) \vee (\forall_x : \psi(x))]$
2. $[\exists_x : (\phi(x) \Rightarrow \psi(x))] \implies [(\exists_x : \phi(x)) \Rightarrow (\exists_x : \psi(x))]$

Zadanie 5 – 6 pkt.

Udowodnij 4 Prawa rozdzielności kwantyfikatorów oraz tam gdzie są implikacje pokaż, że nie zachodzą w drugą stronę.

Zadanie 6 – 9 pkt.

Korzystając z definicji operatorów zbiorowych, udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$

Zadanie 7 – 4 pkt.

Za pomocą indukcji matematycznej pokaż, że poniższe stwierdzenia są prawdziwe dale $n \geq 1$

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$