

Robo Arm - Zadania Kwalifikacyjne

Mateusz Kamiński

April 27, 2025

1 Wstęp

Oto zadania kwalifikacyjne na warsztaty Robo Arm na WWW21. Zadania są z zakresu obliczania pozycji prostą trygonometrią oraz dodatkowych rozważań na temat pozycjonowania ramienia. Na końcu jest jeszcze krótkie zadanie z programowania.

Przy wyprowadzeniach zależności zapisz całe wyprowadzenie (-50% za niepodanie wyprowadzenia w danym podpunkcie). Zadania "podstawowe" to te za (+x pkt.), a "dodatkowe" to te za (dod. +x pkt.). Próg na zaliczenie będzie mniejszy lub równy, niż suma punktów z zadań podstawowych. (≤ 50 pkt.)

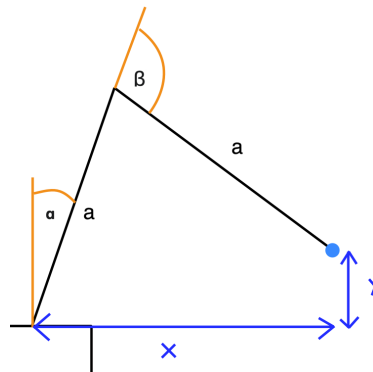
Ściąga trygonometryczna do zadań: <https://www.matemaks.pl/wzory-trygonometryczne.html> (No joke, moja ulubiona strona do wzorów trygonometrycznych). Jeżeli masz problem z jakimś zadaniem to pisz śmiało na mojego maila "mateusz.kam4@gmail.com" lub na messengerze "https://www.facebook.com/mateusz.kaminski.7146557/".

Z racji, że chciałbym wiedzieć, jak zaawansowane warsztaty powinienem zrobić i ile materiału powinienem przygotować proszę o krótkie przedstawienie się. Kim jesteś? Czemu chcesz uczestniczyć w moich warsztatach? Czy wymagania dobrze odpowiadają Twoim umiejętnościom? Czy słyszałeś już kiedyś o zagadnieniach, które planuję przerobić w czasie warsztatów? Jaki temat najbardziej by Cię interesował? (+10 pkt. (zależy mi na tym, żeby się dowiedzieć oraz jakbym dał 5 pkt. to suma byłaby 45 pkt., a wolę okrągłą liczbę)).

Dodatkowo będę wdzięczny za przesłanie rozwiązań w postaci pdf'a wygenerowanego poprzez kod napisany w języku LaTeX (wraz z rozwiązaniem zadania programistycznego poprzez użycie paczki "minted") (dod. +5 pkt.). Myślę, że warto nauczyć się pisać w LaTeX'u, dlatego nagradzam oddanie rozwiązania w powyższy sposób dodatkowymi punktami, lecz oczywiście nie jest to wymagane do kwalifikacji. Polecam uczenie się pisanie poprzez przykładowe pliki zapisane w LaTeX'u, jeżeli do mnie napiszesz, to mogę Ci je podesłać.

2 Ustawienie oraz możliwości ramienia robotycznego

Rozważmy przykładowe ramię robotyczne, takie jak na rysunku poniżej.



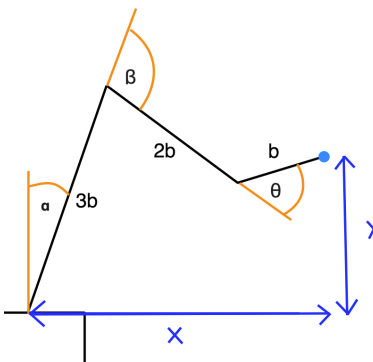
Ramię to składa się z dwóch złącz obrotowych (revolute joints) oraz dwóch przedłużeń (patyków XD) oba o długości a . Oznaczmy kąt pierwszego złącza jako α , a drugiego jako β . Końcówka ramienia (end effector - w skrócie 'EE') oznaczona jest poprzez błękitną kropkę i to jej pozycją będziemy się zajmować (w realnym świecie byłby to

np. łapak (gripper), który łapie przedmioty w miejscu błękitnej kropki). Oczywiście najbardziej nas interesuje pozycja EE, którą zgodnie z rysunkiem oznaczmy jako x i y . Po tym krótkim wstępie przejdźmy do zadań (dla wygody i rozwiania jakichkolwiek wątpliwości ze względu na stolik uznajmy, że rozważamy tylko pozycje EE, w których $y > 0$ oraz pozostała część ramienia może nachodzić na stolik (założenie godne prawdziwego fizyka)). Do jakich współrzędnych x i y możemy ustawić EE? - podaj przedziały (+2 pkt.). Na ile sposobów możemy ustawić kąty α i β , aby EE było w danym punkcie? Czy ilość sposobów zależy od danego x i y , a jeśli tak, to w jaki sposób i dla jakich x i y ? (+3 pkt.). (tip: bardzo łatwo jest zapisać te rozwiązania w układzie walcowym $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\gamma = \arctan \frac{y}{x}$)

Przechodząc w końcu do trochu matmy, wyznacz pozycję EE w postaci wartości x i y w zależności od kątów α i β . (+5 pkt.)

Po otrzymaniu powyższego wzoru, wyprowadź wartości kątów złączeń α i β , w zależności od x i y . Załóż, że $\beta \in [0, \pi]$ (połowa zakresu) oraz $\alpha = [-\pi, \pi]$ (cały zakres). (dod. +5 pkt.)

Przejdźmy teraz do poniższego układu rozszerzonego o jedno dodatkowe złącze obrotowe.



gdzie zachodzi $3b = a$, względem poprzedniego przykładu. Możemy zauważyć, że zasięg ramienia nie powiększył się względem poprzedniego przykładu. Dlaczego więc w prawdziwych (przemysłowych czy coś) ramieniach robotycznych dodaje się taki dodatkowy obrót? (+2 pkt.) Ponownie rozważmy możliwe ustawienia EE w danej pozycji. Na ile sposobów możemy to zrobić w zależności od danego x i y ? (+3 pkt.)

Ponownie przechodząc do matmy, wyznacz pozycję EE w postaci wartości x i y w zależności od kątów α , β i θ . (+5 pkt.)

Oznaczmy kąt ostatniej części ramienia (ostatniego patyka XD) względem poziomu jako φ . Podaj wzór na φ (dod. +1 pkt.). Jak zmieni się liczba rozwiązań na ustawienie kątów α , β i θ , jeżeli kąt φ jest ustalony (na przykład $\varphi = 0$ - poziomo). (dod. +4 pkt.)

3 Ruch ramienia

Powróćmy do przykładu z rysunku 2. Rozważmy sytuację jak poniżej, gdzie końcówka ramienia została podniesiona o małą wysokość Δy .

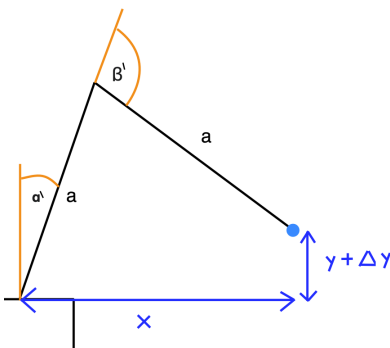


Figure 1:

Mając rozwiązanie z poprzedniego zadania z pewnością jesteś w stanie wyznaczyć wartości kątów α' i β' . Podstaw teraz wartości $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$ oraz $\beta' = \beta + \Delta\beta$ oraz oblicz wartości $\Delta\alpha$ i $\Delta\beta$ (+5 pkt). Od czego i w jaki sposób zależą te wartości? Jaki sens fizyczny ma ten wzór? (+2,5 pkt.) Na koniec podaj wzór prędkości zmian kąta α i β , odpowiednio $\dot{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ oraz $\dot{\beta} = \frac{\Delta\beta}{\Delta t}$ od prędkości poruszania się końcówki ramienia w górę $v_y = \dot{y} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ (tip: podziel przez małą chwilę Δt). (+2,5 pkt.)

Przydatne mogą okazać się wzory dla $|x| \ll 1$:

- $(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot x$
- $\sin x \approx x$ - x w radianach
- $\cos x \approx 1 - x$ w radianach

Następnie powróćmy także do drugiego przykładu z rysunku 2. Rozważmy podobną sytuację, że końcówka tego ramienia porusza się w górę o małą wartość Δy . Dlaczego w tym przypadku ciężko byłoby wyznaczyć wartości $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\theta$? (dod. +2,5 pkt.) Co musielibyśmy zrobić, aby otrzymać ścisły wzór? (dod. +2,5 pkt.)

4 Programing

Stwórz funkcję przyjmującą dwa argumenty kątów α i β , która na ich podstawie obliczy i wypisze pozycję EE, zgodnie z rysunkiem 2. (+5 pkt.) Następnie napisz program składający się z pętli, która wywołuje napisaną funkcję dla zmieniających się argumentów α i β w zakresie od $-\pi$ do π (np. $\alpha = 2\beta$) oraz pomiędzy każdym wywołaniem czeka pół sekundy. Powinien on przeiterować co najmniej raz cały zakres od $-\pi$ do π oraz mieć co najmniej 100 iteracji (+5 pkt.) Przyjmij $a = 3$.

Stwórz funkcję przyjmującą 3 argumenty kątów α , β i θ , która ponownie oblicza i wypisuje pozycję EE, zgodnie z rysunkiem 2. Napisz program, który ponownie jak poprzednio będzie iterować po kątach w pętli wywołując funkcję. (dod. +5 pkt.)