Rozumowanie Bayesowskie

Michał Burzyński

Celem tych zadań jest zachęcenie Was do ogarnięcia podstaw rachunku prawdopodobieństwa — tematu, który odegra dużą rolę na warsztatach. Na początku spotkania przedstawię najważniejsze definicje i własności, które warto znać, ale samodzielne rozwiązanie zadań pomoże Wam złapać odpowiednią intuicję. Żeby dostać się na warsztaty, **nie trzeba rozwiązać wszystkich zadań** — choć im więcej, tym lepiej! :)

W razie pytań, sugestii czy innych spraw, śmiało piszcie na maila: michal28burzynski@gmail.com

1 Intro

Pytanie 1.1 (2 pkt)**.** Napisz coś o sobie, np. dlaczego akurat te zajęcia, czy miałeś/łaś już jakiś kontakt z rachunkiem prawdopodobieństwa itd.

2 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

Definicja 2.1. Niech Ω będzie dowolnym zbiorem niepustym, a $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ pewnym σ-ciałem. Parę $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywamy przestrzenią mierzalną.

Na obecną chwilę nie potrzebujemy wiedzieć co oznacza σ-ciało. Wystarczy tylko intuicja, że dla każdego podzbioru $A \subset \Omega$ do $\mathcal{F}$ należą zbiory związane z A (tzn. dopełnienie, suma dwóch zbiorów, część wspólna itd.).

Definicja 2.2. Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, wtedy $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jest miarą probabilistyczną gdy:

1. $\forall_{A\in\mathcal{F}} 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
2. $\mathbb{P}(A) = 1$
3. jeśli $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne to $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{n} \mathbb{P}(A_n)$

Zadanie 2.3 (3 pkt)**.** Niech $A, B \subset \Omega$. Wykaż następujące własności:

(a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(b) Jeśli $A \subseteq B$ to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(c) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

(d) Jeśli $A \subseteq B$ to $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

Definicja 2.4. Niech $A, B \in \Omega$ i $\mathbb{P}(B) > 0$, wtedy prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B oznaczamy przez $\mathbb{P}(A \mid B)$ zdefiniowane jako:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Intuicyjnie możemy myśleć o prawdopodobieństwie warunkowym jako o "ograniczeniu"całej przestrzeni możliwych zdarzeń Ω do B a następnie "przeskalowaniu"prawdopodobieństwa by spełniało wymagane założenia.

Zadanie 2.5 (1 pkt)**.** Niech $A, B \in \Omega$ i niech $\mathbb{P}(B) > 0$. Wykaż, że $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$

Zadanie 2.6 (2 pkt)**.** Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ będzie podziałem Ω (tzn. $\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset$ oraz $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$). Wykaż, że dla dowolnego $B \subset \Omega$ zachodzi:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)$$

Zadanie 2.7 (1 pkt)**.** Niech $A_1, A_2, B \in \Omega$ będą takimi zdarzeniami, że $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$ oraz A_1 implikuje B i A_2 implikuje B. Wykaż, że

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \mathbb{P}(A_2 \mid B)$$

Definicja 2.8. Niech $A, B \in \Omega$. Powiemy, że zdarzenia A i B są *niezależne* jeśli $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Jeśli $\mathbb{P}(A) > 0$ i $\mathbb{P}(B) > 0$ to jest to równoważne $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Uwaga: niezależność zdarzeń A i B oraz ich rozłączność to zupełnie co innego! Zdarzenia A i B są rozłączne wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

Intuicyjnie o niezależności zdarzeń A i B możemy myśleć w kontekście informacji jakie otrzymamy gdy zajdzie jedno z nich, np. B. Skoro $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ to widzimy, że zajście zdarzenia B nie wpłynęło w żaden sposób na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A (więc te zdarzenia są "niezależne").

Zadanie 2.9 (2 pkt)**.** Niech $A, B \in \Omega$ będą niezależnymi zdarzeniami. Wykaż, że A i B^c są niezależne, A^c i B są niezależne, oraz A^c i B^c są niezależne, gdzie $A^c = \Omega / A$ to dopełnienie zdarzenia A.

Zadanie 2.10 (2 pkt)**.** Niech $A, B \in \Omega$ takie, że $\mathbb{P}(B) > 0$. Wykaż, że:

(a) Jeśli $\mathbb{P}(A) = 0$ to $\mathbb{P}(A \mid B) = 0$.

(b) Jeśli $\mathbb{P}(A) = 1$ to $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$.

3 Zadania z treścią

Celem tych zadań jest nauczenie się, jak przekładać informacje z tekstu na język rachunku prawdopodobieństwa — na przykład umiejętność rozróżniania sytuacji, w których mówimy o prawdopodobieństwie warunkowym, a kiedy nie.

Zadanie 3.1 (2 pkt)**.** Ostatnio naukowcy odkryli nową chorobę X, na którą choruje dokładnie 1% populacji. Przestraszony tą informacją kupiłeś w najbliższym sklepie test na X, który według producenta ma “czułość” 99% (formalniej $\mathbb{P}$(test dodatni | chorujesz na X) = 0.99) oraz “swoistość” 5% (formalniej $\mathbb{P}$(test ujemny | nie chorujesz na X) = 0.05). Po powrocie do domu, zbadałeś się i okazało się, że test wyszedł dodatni. Mając te informacje:

(a) Bez liczenia czegokolwiek, określ prawdopodobieństwo, że jesteś chory na X (po prostu napisz co podpowiada intuicja np. "coś koło 65-75%").

(b) Policz prawdopodobieństwo tego, że jesteś chory na X, więdząc, że test wyszedł dodatni.

Czy wynik zaskakuje? Z czego może wynikać różnica między odpowiedziami w obu podpunktach?

Zadanie 3.2 (1 pkt)**.** Pewnego dnia spotykasz rodzica, który mówi ci, że ma dwójkę dzieci i co najmniej jedno z tych dzieci jest chłopcem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie dziecko to dziewczynka?

Zadanie 3.3 (1 pkt)**.** Dokładnie 80% maili, które dostaję to spam. Wśród maili ze spamu, dokładnie 10% zawiera zwrot "darmowe pieniądze", natomiast wśród pozostałych maili zwrot ten występuje tylko w 1%. Właśnie dostałem nowego maila, który zawiera zwrot "darmowe pieniądze". Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to spam?

Zadanie 3.4 (2 pkt)**.** W pudełku znajduje się jeden cukierek, który jest niebieski lub zielony z równym prawdopodobieństwem. Do pudełka dorzucamy zielony cukierek, a następnie wyciągamy z pudełka jeden z cukierków (losowo, z równym prawdopodobieństwem). Okazało się, że cukierek, który wyciągnęliśmy jest zielony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugi cukierek również jest zielony?

Zadanie 3.5 (4 pkt)**.** Dwóch przyjaciół, Jacek i Placek, znalazło monetę. Jeden z nich podrzucił ją 92 razy i za każdym razem wypadł orzeł co spowodowało kłótnię:

Jacek: Taki wynik byłby strasznie nieprawdopodobny z uczciwą monetą (gdzie prawdopodobieństwo orła i reszki jest równe), więc moneta musi być ważona.

Placek: To prawda, że wynik 92 orłów pod rząd jest bardzo mało prawdopodobny, szansa na to wynosi $\frac{1}{2^{92}} \approx 2 \cdot 10^{-28}$ w przypadku uczciwej monety. Nie mniej jednak każdy inny wynik 92 rzutów monetą jest równie nieprawdopodobny i ma dokładnie takie samo prawdopodobieństwo. Jedynym powodem, dla którego to zdarzenie jest tak mało prawdopodobne jest to, że liczba zdarzeń jest ogromna (możliwych zdarzeń jest 2^{92}), więc każde możliwe zdarzenie byłoby mało prawdopodobne. Równie dobrze mógłbyś użyć takiego samego argumentu nie patrząc na wynik rzutów co oznacza, że nie masz żadnych dowodów na to, że moneta nie jest uczciwa.

Który z nich ma rację? Czy którykolwiek z nich ma rację? Uzasadnij dlaczego tak myślisz.