

Dru(t)y

Zadania kwalifikacyjne WWW21

Jakub Halfar

27 kwietnia 2025

Wstęp

Zadania stanowią wstęp do tematyki warsztatów i mają na celu sprawdzić umiejętność zastosowania praw Kirchhoffa, Ohma oraz wykorzystania wybranych zagadnień analizy matematycznej w praktyce. Jest ich sporo, dlatego nie ma konieczności rozwiązania wszystkich.

Zachęcam do spróbowania rozwiązania jak największej ich ilości, ponieważ różnią się one trudnością, a do większości z nich znajdują się podpowiedzi. Rozwiązania cząstkowe też są jak najbardziej mile widziane.

Preferowana forma rozwiązań to wynikowy plik w formacie PDF. Może być on spisany odręcznie lub jeśli ktoś jest ambitny to w LaTeXie. Rozwiązania należy przesłać przez stronę warsztatów. Rozwiązania można wysyłać i poprawiać wielokrotnie.

W razie jakichkolwiek pytań, wątpliwości czy zauważonych błędów zapraszam do kontaktu:
jakubhalfar@student.agh.edu.pl.

Powodzenia!

Przydatna teoria

Pierwsze prawo Kirchhoffa (prądowe prawo Kirchhoffa, PPK)

Algebraiczna suma prądów wpływających do węzła jest równa 0. Prądy wpływające przyjmuje się ze znakiem (+), a wypływające ze znakiem (-).

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

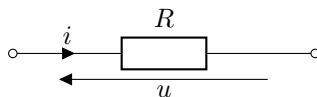
Drugie prawo Kirchhoffa (napięciowe prawo Kirchhoffa, NPK)

W zamkniętym obwodzie (oczku obwodu) algebraiczna suma zmian potencjałów (napięć) jest równa 0.

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

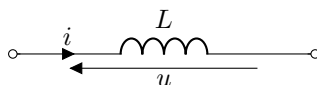
Prawo Ohma

$$u = Ri,$$



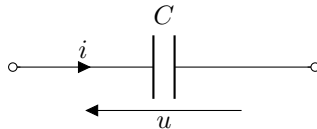
Prawo Faradaya

$$u = L \frac{di}{dt},$$



Równanie kondensatora

$$i = C \frac{du}{dt},$$



Zadania

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia: **62**.

Zadanie 1. (10 pkt)

Definiujemy następujące działanie dwuargumentowe:

$$a \parallel b = \frac{a \cdot b}{a + b},$$

gdzie $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$.

Zbiór $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ to rozszerzony zbiór liczb zespolonych (liczby zespolone z dodanym punktem w nieskończoności).

1. (**1 pkt**) Podaj i wyprowadź interpretację działania $\parallel$, jeśli mamy do dyspozycji dwa rezystory o rezystancjach R_1 oraz R_2 .

Podpowiedź:



2. (1 pkt) Podaj i wyprowadź interpretację działania $\parallel$, jeśli mamy do dyspozycji dwie cewki o indukcyjnościach L_1 oraz L_2 (zakładamy brak sprzężenia magnetycznego między cewkami).

Podpowiedź:

3. (1 pkt) Podaj i wyprowadź interpretację działania $\parallel$, jeśli mamy do dyspozycji dwa kondensatory o pojemnościach C_1 oraz C_2 .

Podpowiedź:

Następnie udowodnij następujące własności tego działania:

4. (1 pkt) Przemienność

$$a \parallel b = b \parallel a$$

5. (1 pkt) Łączność

$$(a \parallel b) \parallel c = a \parallel (b \parallel c) = a \parallel b \parallel c$$

6. (2 pkt) Złożenie

$$\underbrace{a \parallel a \parallel \dots \parallel a}_{n \text{ razy}} = \frac{a}{n}$$

Podpowiedź:

7. (2 pkt) Dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a, b \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \min(a, b) \leq a \parallel b \leq \min(a, b)$$

Podpowiedź:

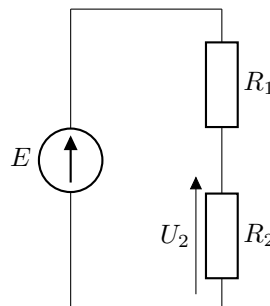
8. (1 pkt) Łączenie elementów o tym samym module, ale na osiach rzeczywistej i urojonej

$$a \parallel (\pm ja) = \frac{a}{2} \pm j \frac{a}{2}$$

Zadanie 2. (6 pkt)

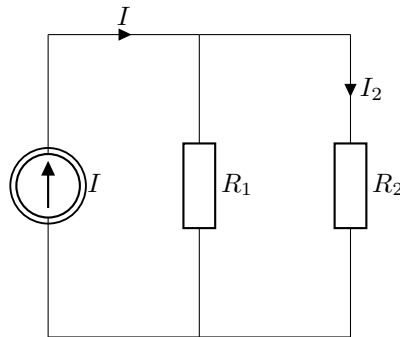
1. (3 pkt) Wyprowadź wzór na **dzielnik napięcia**, czyli napięcie U_2 na rezystorze R_2 .

Dane: E, R_1, R_2 .



2. (3 pkt) Wyprowadź wzór na **dzielnik prądu**, czyli prąd I_2 w gałęzi z rezystorem R_2 .

Dane: I, R_1, R_2 .



Zadanie 3. (15 pkt)

Masz do dyspozycji baterię o sile elektromotorycznej E oraz rezystancji wewnętrznej R_w .

1. (6 pkt) Jakie obciążenie R należy podłączyć, aby moc na obciążeniu była maksymalna? Stan taki nazywamy stanem dopasowania impedancyjnego obwodu.
2. (2 pkt) Policz dla tej wartości R sprawność η definiowaną następująco:

$$\eta = \frac{P_R}{P},$$

gdzie P_R to moc na elemencie R , natomiast P to całkowita moc dostarczana do układu przez źródło napięcia E .

3. (4 pkt) Napięcie na obciążeniu można rozłożyć na sumę dwóch napięć:

$$U_R = U_{Ri} + U_{Rr},$$

gdzie:

- U_{Ri} - składowa napięcia padającego (*incident*), która występuje dla warunków dopasowania,
- U_{Rr} - składowa odbita (*reflected*).

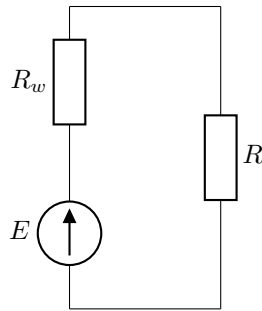
Wyprowadź wzór na współczynnik odbicia Γ zdefiniowany następująco:

$$\Gamma = \frac{U_{Rr}}{U_{Ri}}$$

i wyraż go za pomocą R_w oraz R .

4. (3 pkt) Podaj, jakie wartości przyjmuje współczynnik odbicia dla trzech charakterystycznych wartości obciążenia:
 - zwarcie ($R = 0$),
 - rozwarcie ($R = \infty$),
 - dopasowanie.

Dane: E, R_w, R .



Podpowiedź 1:



Podpowiedź 2:



Zadanie 4. (6 pkt)

Jak w stanie ustalonym w obwodach prądu stałego wyglądają charakterystyki prądowo-napięciowe następujących elementów:

1. **(2 pkt)** rezystora R ,
2. **(2 pkt)** cewki L ,
3. **(2 pkt)** kondensatora C ?

Przez stan ustalony rozumiemy sytuację, w której zjawiska zachodzące w obwodzie nie zależą od czasu. Dla obwodów prądu stałego jest to równoważne z sytuacją, w której wszystkie przebiegi prądu i napięcia osiągnęły stałą wartość.

Charakterystyka prądowo-napięciowa to wykres $I = f(U)$, na którym znajdują się wszystkie możliwe punkty (U, I) , które są dozwolonymi stanami danego elementu (napięcie na nim i prąd przez niego przepływający).

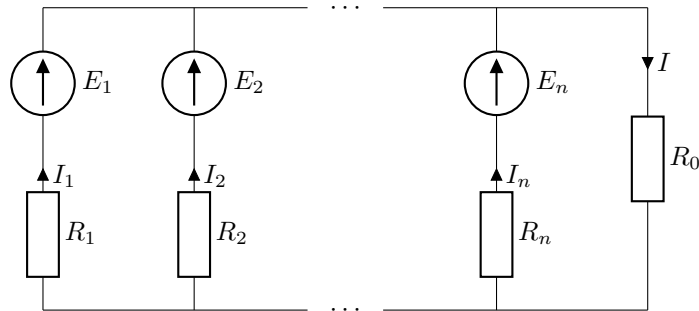
Zadanie 5. (10 pkt)

Załóżmy, że budujesz zgrzewarkę punktową do ogniw, przez co potrzebujesz uzyskać bardzo duży impuls prądu, aby zespawać blaszkę niklową do ogniw i połączyć je w większy pakiet. Masz do dyspozycji n baterii, każda o sile elektromotorycznej E_i oraz rezystancji wewnętrznej R_i ($1 \leq i \leq n$).

Policz, jaki prąd I popłynie przez blaszkę o rezystancji R_0 , jeśli połączysz baterie równolegle oraz w identyczny sposób spolaryzujesz (plusy do plusów, minusy do minusów).

Wykorzystaj metodę praw Kirchhoffa oraz prawo Ohma.

Dane: $E_1, \dots, E_n, R_1, \dots, R_n, R_0$.



Podpowiedź 1:

[Redacted]

Podpowiedź 2:

[Redacted]

Podpowiedź 3:

[Redacted]

Podpowiedź 4:

[Redacted]

Zadanie 6. (15 pkt)

Wartość skuteczną prądu okresowo zmiennego $i(t)$ definiujemy jako taką wartość prądu stałego I , która w ciągu czasu równemu okresowi T przebiegu $i(t)$ spowoduje ten sam efekt cieplny, co sygnał $i(t)$ w tym samym czasie.

1. **(3 pkt)** Zapisz powyższą definicję w sposób matematyczny i wyprowadź ogólny wzór na wartość skuteczną dowolnego przebiegu $i(t)$.

Podpowiedź:

[Redacted]

2. Policz wartość skuteczną dla następujących przebiegów (zakładamy teraz przebiegi napięciowe, jednak wzory są takie same jak dla przebiegu prądowego):

- (a) **(3 pkt)** Przebieg sinusoidalny

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Wskazówka:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin x + C$$

- (b) **(3 pkt)** Przebieg sinusoidalny wyprostowany (po przejściu przez prostownik dwupołkowy)

$$u(t) = |U_m \sin(\omega t + \varphi)|$$

- (c) **(3 pkt)** Sygnał PWM o współczynniku wypełnienia D zdefiniowanym następująco:

$$D = \frac{t_{on}}{T},$$

gdzie t_{on} to czas, przez który przebieg przyjmuje niezerową wartość, natomiast T to okres przebiegu.

$$u(t) = \begin{cases} U_m & 0 \leq t \leq t_{on} \\ 0 & t_{on} < t < T \end{cases}$$

- (d) **(3 pkt)** Symetryczny sygnał prostokątny o współczynniku wypełnienia D (t_{on} przyjmujemy jako czas przyjmowania dodatniego napięcia)

$$u(t) = \begin{cases} U_m & 0 \leq t \leq t_{on} \\ -U_m & t_{on} < t < T \end{cases}$$