

Warsztaty " dx , ale czym właściwie jest d ?"

Zadania Kwalifikacyjne

26 kwietnia 2025

Wprowadzenie

Poniższe zadania mają na celu sprawdzenie podstawowych umiejętności matematycznych, które będą przydatne podczas warsztatów " dx , ale czym właściwie jest d ?". Przygotowane są one z myślą o kandydatach na różnych poziomach zaawansowania matematycznego, dlatego też zadania posortowano w kolejności rosnącego poziomu trudności! Nie przejmuj się, jeśli nie potrafisz rozwiązać ich wszystkich – wyślij tyle, ile potrafisz! Jest to też dla mnie informacja zwrotna, żebym mógł dopasować poziom kursu do uczestników. Proszę o przedstawianie toku swojego rozumowania. Niektóre zadania zawierają wskazówki, które mogą okazać się pomocne. Powodzenia!

Zadania

1. Całkowanie

Oblicz następujące całki:

a) Całka nieoznaczona z wielomianu:

$$\int (3x^4 - 5x^2 + 2x - 7) dx$$

b) Prosta całka oznaczona:

$$\int_0^{\pi/2} (2x + \sin(x)) dx$$

c) Całka nieoznaczona z funkcji wykładniczej i ułamkowej:

$$\int (4e^{2x} + \frac{1}{x}) dx \quad (\text{dla } x > 0)$$

d) Całka oznaczona wymagająca podstawienia:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$$

e) Całka nieoznaczona wymagająca całkowania przez części:

$$\int x \cos(x) dx$$

2. Różniczkowanie

Oblicz pochodne następujących funkcji $f(x)$ względem zmiennej x :

a) Pochodna wielomianu:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + \sqrt{2}x + \pi$$

b) Pochodna iloczynu:

$$f(x) = x^2 \ln(x) \quad (\text{dla } x > 0)$$

c) Pochodna ilorazu:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$$

d) Pochodna funkcji złożonej:

$$f(x) = e^{x^2+1}$$

e) Pochodna funkcji złożonej z funkcją trygonometryczną:

$$f(x) = \tan(3x^2 - 5)$$

3. Wektory w $\mathbb{R}^3$

Dane są dwa wektory w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = [1, -2, 3] \quad \text{oraz} \quad \mathbf{b} = [0, 4, 1]$$

Oblicz:

a) Iloczyn skalarny wektorów: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

b) Iloczyn wektorowy wektorów: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

c) Długość (moduł) wektora $\mathbf{a}$: $\|\mathbf{a}\|$ oraz wektora $\mathbf{b}$: $\|\mathbf{b}\|$

d) Wersor (wektor jednostkowy) w kierunku wektora $\mathbf{a}$. Oznaczmy go $\hat{\mathbf{a}}$.

e) Kąt θ pomiędzy wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Wynik podaj jako $\cos(\theta)$. (Wskazówka: Skorzystaj z definicji iloczynu skalarnego: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta)$)

f) Rzut wektora $\mathbf{b}$ na wektor $\mathbf{a}$. Oznaczmy go $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$. (Wskazówka: $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$)

g) Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. (Wskazówka: Pole to jest równe długości iloczynu wektorowego: $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$)

4. **Prawo Gaussa - Podstawy** Wyobraźmy sobie ładunek punktowy Q umieszczony w centrum układu współrzędnych. Wytwarza on wokół siebie pole elektryczne $\mathbf{E}$. Prawo Gaussa mówi nam, jak obliczyć "całkowity strumień" tego pola przechodzący przez **zamkniętą** powierzchnię $\mathcal{S}$:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{wew}}}{\varepsilon_0}$$

gdzie Q_{wew} to **całkowity ładunek znajdujący się wewnątrz** tej powierzchni.

Gdzie szukać więcej informacji? Jeśli chcesz lepiej zrozumieć Prawo Gaussa, jego znaczenie i zastosowania, polecamy zajrzeć do:

- Standardowych podręczników do fizyki, np. "Podstawy Fizyki" autorstwa Hallidaya, Resnicka i Walkera (szczególnie rozdziały dotyczące elektrostatyki).

- Materiałów online, takich jak:
 - Kursy fizyki na platformie Khan Academy (<https://pl.khanacademy.org/science/physics>).
 - Strona HyperPhysics (<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html>) - bogate źródło skondensowanych informacji z fizyki (w języku angielskim).
 - Wykłady i materiały udostępniane przez uczelnie wyższe (np. MIT OpenCourseWare, strony wydziałów fizyki polskich uniwersytetów).
- Poszukania wizualizacji i symulacji Prawa Gaussa w internecie, które mogą pomóc w intuicyjnym zrozumieniu koncepcji strumienia pola elektrycznego.

Rozważmy dwie wyobrażone sfery $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ o środku w tym samym punkcie, w którym znajduje się nasz ładunek Q . Niech sfera $\mathcal{S}_1$ ma promień R_1 , a sfera $\mathcal{S}_2$ ma promień R_2 , przy czym $R_2 > R_1$.

Twoje zadanie: Wyjaśnij, dlaczego całkowity strumień pola elektrycznego $\mathbf{E}$ przez powierzchnię sfery $\mathcal{S}_1$ jest **taki sam** jak strumień przez powierzchnię sfery $\mathcal{S}_2$.

Wskazówki:

- Nie musisz obliczać żadnych skomplikowanych całek! Kluczem jest zrozumienie i zastosowanie podanego wzoru.
- Zastanów się, jaki jest całkowity ładunek Q_{wew} wewnątrz sfery $\mathcal{S}_1$ oraz wewnątrz sfery $\mathcal{S}_2$. Czy coś się zmieniło?
- Jak wartość Q_{wew} wpływa na wartość strumienia zgodnie z Prawem Gaussa?

Napisz swoje wyjaśnienie w kilku zdaniach.

5. Zadanie Koncepcyjne: Prawo Gaussa, Przewodniki i Ładunki Indukowane

Rozważmy następujący układ: W centrum znajduje się ładunek punktowy $+Q$. Otacza go gruba, **przewodząca**, sferyczna powłoka, która jest elektrycznie **neutralna**. Wewnętrzny promień powłoki wynosi R_1 , a zewnętrzny R_2 (gdzie $R_2 > R_1$). Układ znajduje się w stanie równowagi elektrostatycznej.

Odpowiedz na poniższe pytania, uzasadniając swoje odpowiedzi w oparciu o Prawo Gaussa i właściwości przewodników w elektrostatyce.

- Jaki ładunek $Q_{ind,1}$ indukuje się na **wewnętrznej** powierzchni powłoki przewodzącej (przy $r = R_1$)? Wyjaśnij dlaczego. (Wskazówka: Jakie jest pole $\mathbf{E}$ wewnątrz materiału przewodnika w równowadze? Rozważ sferyczną powierzchnię Gaussa $\mathcal{S}$ o promieniu $R_1 < r < R_2$. Jaki musi być Q_{wew} wewnątrz $\mathcal{S}$?)
- Jaki ładunek $Q_{ind,2}$ indukuje się na **zewnętrznej** powierzchni powłoki przewodzącej (przy $r = R_2$)? Wyjaśnij skąd ta wartość. (Wskazówka: Cała powłoka była początkowo neutralna. Jaka jest suma $Q_{ind,1} + Q_{ind,2}$?)
- Oblicz całkowity strumień pola $\Phi_C = \oint_{\mathcal{S}_C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ przez sferyczną powierzchnię Gaussa $\mathcal{S}_C$ o promieniu $r > R_2$. Wynik wyraż za pomocą Q i ϵ_0 . (Wskazówka: Jaki jest całkowity Q_{wew} wewnątrz $\mathcal{S}_C$? Uwzględnij $+Q$, $Q_{ind,1}$ i $Q_{ind,2}$.)
- Jak zmieniłby się strumień Φ_C , gdyby powłoka przewodząca **nie była sferą**, ale miała nieregularny kształt, nadal otaczając $+Q$ i pozostając neutralna? Uzasadnij.

- e) (Trudniejsze) Jak zmieniłoby się pole **E na zewnątrz** powłoki (dla $r > R_2$), gdyby ładunek $+Q$ został przesunięty z centrum, ale **pozostał wewnątrz** wnęki ($r < R_1$)? Czy strumień Φ_C by się zmienił? Uzasadnij. (Wskazówka: Pomyśl o ekranowaniu elektrostatycznym. Czy rozkład ładunku $Q_{ind,2}$ na zewnętrznej powierzchni "wie" o położeniu ładunku wewnątrz wnęki?)