

Dlaczego bozony się lubią, a fermiony nie?

Zadania kwalifikacyjne

Filip Baciak

28 kwietnia 2025

Poniższe zadania przygotowałem z myślą o kandydatach na różnych poziomach zaawansowania, dlatego też zadania posortowano w kolejności rosnącego poziomu trudności! Nie przejmuj się, jeśli nie potrafisz rozwiązać ich wszystkich – wyślij tyle, ile potrafisz! Jest to też dla mnie informacja zwrotna, żebyśmy mogli dopasować poziom kursu do uczestników. *Powodzenia!*

Zadanie 1 Równanie stanu gazu doskonałego ma postać:

$$pV = Nk_B T.$$

Chcemy znaleźć, jak zmienia się gęstość powietrza ρ w zależności od wysokości h dla statycznej atmosfery. W tym celu wyobraź sobie statyczną atmosferę złożoną z powietrza o stałej masie molowej $\mu = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ i podziel atmosferę na cienkie fragmenty o grubości Δh i rozważ warunek równowagi mechanicznej tej warstwy. Otrzymaj w ten sposób równanie różniczkowe i rozwiąż je, żeby otrzymać funkcję $\rho(h)$ w zależności od ρ_0 – gęstości atmosfery na poziomie morza.

Wskazówka. Równanie różniczkowe:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

ma rozwiązanie:

$$x = Ae^{at},$$

dla $a \in \mathbb{R}$.

Zwróć uwagę na czynnik w mianowniku wykładnika – będzie on miał dla nas duże znaczenie.

Zadanie 2 Fermiony to cząstki, które podlegają tzw. statystyce Fermiego, tj. pojedynczy stan kwantowy może być zajmowany przez co najwyżej jedną taką cząstkę. Wyobraź sobie jednowymiarowe pudełko o długości L w którym

znajduje się N fermionów (np. elektronów) o spinie $\frac{1}{2}$. Formalnie, pudełko zapisujemy jako potencjał:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Stan stacjonarny takiej cząstki składa się z funkcji falowej $\psi(x)$ będącej rozwiązaniem stacjonarnego równania Schrödingera:

$$E \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x),$$

gdzie E jest energią cząstki. Rozwiązania tego równania (w naszym przypadku), są postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) + B \cos(kx), & 0 < x < L \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wypisz wszystkie rozwiązania – znajdź możliwe wartości k i E pod warunkiem, że $\psi(x)$ musi być ciągła (nie musisz ich normalizować, czyli wyznaczać A, B).

Następnie wyznacz energię Fermiego ε_F dla N cząstek, które zajmują po kolei (od najmniejszych) wszystkie dozwolone energie. Na jeden poziom energetyczny przypadają dwie cząstki (gdyż każda z cząstek może być w stanie spin w górę lub spin w dół). Energia Fermiego, to najwyższa energia obsadzona przez cząstkę.

Wyznacz też energetyczną gęstość stanów przy poziomie Fermiego, czyli wartość:

$$\frac{\Delta N}{\Delta \varepsilon_F} \approx \frac{dN}{d\varepsilon_F}.$$

Zadanie 3 Dla kwantowego oscylatora harmonicznego o częstości ω suma statystyczna Z ma postać:

$$Z(T) = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\hbar\omega}{2k_B T})}.$$

Wyznacz następujące wielkości:

(a) Energię swobodną:

$$F = -k_B T \log(Z),$$

(b) Entropię:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T},$$

(c) Średnią energię:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial Z}{\partial(\frac{1}{k_B T})}$$

Zadanie 4 Wyznacz sumę statystyczną oscylatora harmonicznego – Z . Jest ona zdefiniowana jako:

$$Z = \text{tr}(e^{\frac{-H}{k_B T}}),$$

czyli:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}},$$

gdzie E_n jest energią n -tego stanu własnego hamiltonianu, równą $E_n = (\frac{1}{2} + n)\hbar\omega$.