

Zadania kwalifikacyjne – Spin i SU(2)

Paweł Przybyła

26 kwietnia 2025

Streszczenie

Warsztaty w ramach 21. Wakacyjnych Warsztatów Wielodyscyplinarnych.

Wstępne uwagi

Próg kwalifikacji wynosi 17 punktów.

Uwaga 1. Można czerpać z dowolnej literatury, internetu oraz różnego rodzaju wskazówek. Możecie też współpracować nad rozwiązaniami zadań. Proszę natomiast zaznaczyć źródła oraz wkład innych osób, jest to dobry naukowy nawyk.

Uwaga 2. Próg kwalifikacji nie jest sztywny, zasadniczo im więcej zadań zrobionych tym lepiej, a lepiej przesłać cokolwiek, niż nic i wykazać się zaangażowaniem. Obszerne rozwiązania zadań opisowych są preferowane i wyżej punktowane (lecz proszę unikać wodolejstwa!).

Uwaga 3. Jeżeli ktoś nie zrobi zadań, lecz przekona mnie w indywidualnym kontakcie, że jest przygotowany i potrafi wymagane zagadnienia z tej oto listy, będzie zakwalifikowany.

Zadania

Zadanie 1. (Pochodne, 5 pkt.)

Oblicz funkcje pochodne funkcji o wartościach zadanych wzorami:

1. $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} \cos x$
2. $g(x) = \operatorname{tg}(\cos x)$
3. $h(x) = x \log(\sin(x + e^x))$

Zadanie 2. (Macierze, 5 pkt.)

Obliczyć iloczyny macierzowe:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. (liczby zespolone, 5 pkt.)

Obliczyć i zapisać w postaci algebraicznej wynik:

- $(5 + 3i)(7 - i)$
- $e^{i\frac{63}{4}\pi}$
- $(21 + 3i)^* |7 - 65i|$

Zadanie 4. (Macierze Pauliego, 10 pkt.)

Macierze hermitowskie to macierze, których elementy spełniają równość $M_{ij}^* = M_{ji}$ (czyli ich transpozycja jest ich sprzężeniem zespolonym). Proszę:

- pokazać, że macierze hermitowskie tworzą przestrzeń liniową,
- zapisać bazę przestrzeni liniowej macierzy hermitowskich 2×2 o współczynnikach zespolonych (*Wskazówka: tytuł zadania kompletnie bez związku...*),
- obliczyć eksponens $U = e^{iH}$ z dowolnej macierzy hermitowskiej H (różnej od identyczności!). Czy uzyskana macierz U ma wyznacznik równy 1?

Kontakt i przesyłanie zadań

Zadania proszę przysyłać do mnie przez stronę. W razie pytań, wątpliwości bądź chęci dowiedzenia się czegoś więcej o Warsztatach i nie tylko, pisać na maila: pawprzybyla9 na gmail.com .