Warsztaty: Geometria na kracie

Zadania Kwalifikacyjne

19 kwietnia 2026

Wprowadzenie

Poniższe zadania mają być wprowadzeniem do zagadnienień poruszanych na warsztatach. Wiele z zadań ma dość bogate wprowadzenie, które polecam przeczytać. Nie zawsze są one niezbędne do rozwiązania zadania, ale będą one nam potrzebne w trakcie warsztatów i wydaje mi się, że dobrze budują intuicję. Zadania do tych warsztatów raczej nie miały być trudne, chociaż to jak zawsze okaże się w praktyce, natomiast są one bardzo ważne i zachęcam do zmierzenia się z nimi. Nie przejmuj się, jeśli nie potrafisz rozwiązać ich wszystkich – wyślij tyle, ile potrafisz! Częściowe rozwiązania, pomysły, czy luźne przemyślenia związane z zadaniem, również są wartościowe i należy je wysyłać. Jest to też dla mnie informacja zwrotna, żebym mógł dopasować poziom kursu do uczestników. Proszę o przedstawianie toku swojego rozumowania.

Oczywiście LLM-y potrafią rozwiązać te zadania, jednak przekopiowując rozwiązania z nich niczego nie można się nauczyć i w zasadzie jest to czas zmarnowany. Jednak jeśli jakieś definicje, sformułowania są niewystarczające/ niejasne, lub po prostu o tym aspekcie chcecie się dowiedzieć więcej to można ich używać, chociaż należy uważać, gdyż często mogą pisać nieprawdę. Dlatego w razie wszelkich pytań, czy wątpliwości, zachęcam do pisania do mnie na maila dudziak.piotrek@gmail.com. Powodzenia i dobrej zabawy przy rozwiązywaniu zadań!

Zadanie 1: Wyznacznik Macierzy 15 pkt

Na nasze potrzeby możemy powiedzieć, że macierz to prostokątna tabliczka wypełniona liczbami. Każdej macierzy kwadratowej możemy przypisać jedną konkretną liczbę zwaną jej wyznacznikiem. Dla macierzy A oznaczamy go jako $\det(A)$ lub $|A|$.

Dla macierzy o wymiarach 2×2 wyznacznik liczymy bardzo prosto, mnożąc elementy „na krzyż" i odejmując je od siebie:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Dla macierzy 3×3 i większych istnieją bardziej rozbudowane wzory jak rozwięcie Laplace'a, ale w praktyce są one bardzo niepraktyczne do używania. Zamiast tego używamy następujących własności wyznacznika, traktując wiersze (lub kolumny) macierzy jak wektory, na których możemy wykonywać operacje:

- **Dodawanie wierszy:** Wyznacznik nie zmienie się, jeśli do dowolnego wiersza (lub kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez jakąś stałą liczbę.
- **Mnożenie wiersza:** Jeśli pomnożymy wszystkie elementy jednego wiersza przez liczbę k, to cały wyznacznik rośnie k-krotnie.
- **Macierz trójkątna:** Jeśli uda nam się za pomocą powyższych operacji wyzerować wszystkie liczby znajdujące się poniżej głównej przekątnej, to wyznacznik takiej macierzy staje się po prostu iloczynem liczb leżących na tej przekątnej.

Dlaczego w ogóle przypisujemy macierzom jakąś liczbę? Każda macierz reprezentuje pewne przekształcenie przestrzeni (np. obrót, skalowanie). Geometrycznie wyznacznik mówi nam, jak bardzo to przekształcenie „rozciąga” lub „kurczy” przestrzeń – jest to współczynnik zmiany pola (w 2D) lub objętości (w 3D).

Tutaj docieramy do potężnego pojęcia zmiany bazy. Baza to po prostu nasz układ współrzędnych (np. klasyczne osie X i Y ułożone prostopadle). Co by było, gdybyśmy spojrzeli na to samo przekształcenie przestrzeni, ale z perspektywy kogoś, kto używa innych, „przekrzywionych” osi? Zmiana bazy to właśnie ten proces. Z punktu widzenia nowego obserwatora, to samo przekształcenie zostanie opisane macierzą o zupełnie innych liczbach! Jednak ponieważ samo fizyczne „rozciąganie” przestrzeni się nie zmieniło, nowa macierz będzie miała dokładnie ten sam wyznacznik. Wyznacznik jest więc niezmiennikiem – wartością, która mówi nam obiektywną prawdę na temat obiektu, niezależnie od tego, przez jaki układ współrzędnych na niego patrzymy. Jeżeli kogoś zainteresował ten fragment to serdecznie polecam zajrzeć do skryptu doktora Męcla. Oczywiście nie jest to wymagane na warsztaty ani do rozwiązania zadania.

Polecenie:
Rozważmy rodzinę macierzy kwadratowych A_n o wymiarach $n \times n$, w których na głównej przekątnej znajdują się same zera, a wszystkie pozostałe elementy są równe 1. Na przykład dla $n = 3$ macierz ta wygląda następująco:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Oblicz wyznacznik macierzy A_3 oraz A_4. (10 pkt)
b) Czy umiesz podać ogólny wzór na wyznacznik macierzy A_n w zależności od wymiaru n. (5 pkt)
Wskazówka: Zastanów się, co się stanie, jeśli do pierwszego wiersza dodasz wszystkie pozostałe wiersze. Jak to wpłynie na wyznacznik? Co wtedy będziesz mógł „wyciągnąć” przed znak wyznacznika?

Zadanie 2: Macierze w analizie grafów 15 pkt

Graf to najprościej mówiąc zbiór kropek (nazywanych wierzchołkami), które są połączone liniami (nazywanymi krawędziami). Możesz o tym myśleć jak o mapie miast połączonych drogami.

Drzewo to z kolei szczególny rodzaj grafu. Wszystkie jego wierzchołki są ze sobą połączone w jeden spójny kawałek (od każdego punktu da się dojść do każdego innego), ale co najważniejsze – nie ma w nim żadnych pętli (zamkniętych cykli).Jeśli zaczniesz iść po krawędziach drzewa i nie będziesz wracać po własnych śladach, nigdy nie dojdziesz do miejsca, z którego wyruszyłeś.

W kombinatoryce niezwykle ważne jest badanie tzw. drzew rozpinających. Wyobraź sobie, że masz dość gęsty graf z wieloma krawędziami. Drzewo rozpinające powstaje, gdy usuniemy z niego część krawędzi w taki sposób, aby to, co zostanie, było drzewem (czyli nie miało cykli) i nadal łączyło ze sobą wszystkie oryginalne wierzchołki w grafie.
Do zliczania tych struktur matematycy używają macierzy Laplace'a grafu. Buduje się ją w następujący sposób: na głównej przekątnej wpisujemy liczbę krawędzi wychodzących z danego wierzchołka (tzw. stopień wierzchołka), a w pozostałe miejsca wpisujemy -1, jeśli dwa wierzchołki są połączone krawędzią, lub 0, jeśli nie są. Zdumiewające twierdzenie Kirchhoffa mówi, że jeśli z takiej macierzy wykreślimy dowolny jeden wiersz i jedną odpowiadającą mu kolumnę, a następnie policzymy wyznacznik tego, co zostało, otrzymamy... dokładną liczbę drzew rozpinających w tym grafie!

Polecenie:

Dana jest następująca macierz Laplace'a L dla pewnego grafu o 4 wierzchołkach:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Wykreśl pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę, a następnie oblicz wyznacznik powstałej macierzy 3×3. Ile drzew rozpinających ma ten graf? (10 pkt)
b) Spróbuj na podstawie macierzy L narysować ten graf. Czy wynik z podpunktu (a) zgadza się z Twoją intuicją, jeśli spróbujesz policzyć te drzewa „na piechotę"? (5 pkt)

Zadanie 3: Pierścienie i Ideały 15 pkt

Struktury, w których możemy dodawać, odejmować i mnożyć elementy (np. zbiór wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ albo zbiór wszystkich wielomianów), nazywamy pierścieniem.

Wewnątrz pierścieni istnieją niezwykle ważne podzbiory zwane ideałami. Zbiór I nazywamy ideałem, jeśli spełnia dwa warunki:

1. **Zamknięcie na dodawanie** Jeśli weźmiesz dwa dowolne elementy z ideału i je do siebie dodasz lub od siebie odejmiesz, wynik zawsze pozostanie w ideale.

2. **Zamknięcie na mnożenie przez elementy pierścienia** Jeśli weźmiesz jakikolwiek element z ideału i pomnożysz go przez dowolony element z całego pierścienia (nawet z zewnątrz ideału!), wynik zostaje wciągnięty do ideału.

Świetnym przykładem ideału w pierścieniu liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ są liczby parzyste. Jeśli dodasz dwie liczby parzyste, dostaniesz parzystą (warunek 1). Jeśli pomnożysz liczbę parzystą przez dowolną liczbę całkowitą, wynik będzie parzysty (warunek 2). Taki ideał zapisujemy krótko jako $I = \langle 2 \rangle$ (ideał generowany przez dwójkę).

Polecenie:

a) Rozważmy zbiór wszystkich liczb nieparzystych. Czy ten zbiór jest ideałem w pierścieniu liczb całkowitych $\mathbb{Z}$? Uzasadnij swoją odpowiedź, sprawdzając oba powyższe warunki. (5 pkt)
b) Rozważmy pierścień wszystkich wielomianów jednej zmiennej $W(x)$. Zdefiniujmy zbiór I jako wszystkie te wielomiany, które po podstawieniu $x = 1$ dają wynik zero (czyli $W(1) = 0$). Przykładem takiego wielomianu jest $P(x) = x^2 - 1$, bo $1^2 - 1 = 0$. Wykaż, opierając się na dwóch definicyjnych warunkach ideału, że zbiór I jest ideałem. (10 pkt)

Zadanie 4: Ideały pierwsze i maksymalne 15 pkt

Skoro wiemy już, czym są ideały, poznajmy ich elitarne podgrupy. Istotne są następujące dwa rodzaje ideałów

1. Ideał pierwszy Przypomina on zachowanie liczb pierwszych. Mówimy, że ideał I jest pierwszy, jeśli spełnia zasadę: „jeśli iloczyn dwóch dowolnych elementów $a \cdot b$ wpada do ideału I, to znaczy, że co najmniej jeden z tych elementów (albo a, albo b) musiał od samego początku należeć do tego ideału”.

2. Ideał maksymalny To taki ideał, który jest tak duży, jak to tylko możliwe, nie będąc jednocześnie całym pierścieniem. Posiada on taką własność, że jeśli dorzucimy do niego jakikolwiek nowy element (którego w nim nie było) i pozwolimy mu zachowywać się jak ideał (czyli mnożyć się przez wszystko i dodawać), to nagle ten nowy zbiór rozszerzy się tak bardzo, że „połknie” cały pierścień. Warto wiedzieć, że ideał pokrywa się z całym pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera liczbę 1.

Polecenie:

a) Rozważmy ideał $I = \langle 6 \rangle$ w pierścieniu liczb całkowitych (czyli zbiór wszystkich wielokrotności szóstki: $\ldots, -6, 0, 6, 12, \ldots$). Wykaż, powołując się na definicję, że **nie jest** to ideał pierwszy. Zastanów się, czy ideał $\langle 5 \rangle$ byłby pierwszy? (5 pkt)
b) Rozważmy pierścień wielomianów dwóch zmiennych x i y. Niech $J = \langle x \rangle$ będzie ideałem generowanym przez x (czyli składa się z wielomianów, z których możemy wyciągnąć x przed nawias, np. $x^2 + xy$, ale nie należy do niego $y^2 + 1$). Z kolei niech $M = \langle x, y \rangle$ będzie ideałem generowanym przez x i y (złożonym z wielomianów, które nie mają żadnego wolnego wyrazu stałego, np. $x^2 + y$).Udowodnij, że ideał $J = \langle x \rangle$ **nie jest** ideałem maksymalnym. (10 pkt)

Zadanie 5: Czym jest topologia? 10 pkt

W klasycznej geometrii odległość mierzymy linijką. W topologii zapominamy o odległościach, a skupiamy się na relacjach bliskości, wprowadzając abstrakcyjne pojęcie zbiorów otwartych.

Formalnie, topologia na pewnym zbiorze X to wybrana rodzina jego podzbiorów (które od tej pory nazywamy „otwartymi”), spełniająca trzy proste warunki:

1. Cały zbiór X oraz zbiór pusty ($\emptyset$) muszą do niej należeć.

2. Część wspólna (przekrój) dwóch (to łatwo przez indukcję rozwinąć na dowoloną skończoną liczbę) dowolnych zbiorów z tej rodziny również do niej należy.

3. Suma dowolnej liczb zbiorów z tej rodziny również do niej należy.

Polecenie:
Rozważmy mały zbiór $X = \{1, 2, 3\}$. Poniżej znajdują się dwie propozycje rodzin podzbiorów otwartych:

$$\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Która z tych rodzin **jest** poprawną topologią na zbiorze X, a która **nie jest**? Uzasadnij swoją odpowiedź, sprawdzając, czy spełniają one powyższe 3 warunki. (10 pkt)

Zadanie 6: Topologia Zariskiego 15 pkt

Nas będzie interesować bardzo specjalna topologia, czyli topologia Zariskiego. Często wygodniej jest w niej definiować najpierw zbiory domknięte (dopełnienia zbiorów otwartych).

Na nasze potrzeby powiedzmy, że zbiór na prostej (np. rzeczywistej) jest zbiorem domkniętym w tej topologii wtedy i tylko wtedy, gdy stanowi zbiór miejsc zerowych jakiegoś wielomianu.

Polecenie:

a) Wyobraź sobie dwa zbiory otwarte w topologii Zariskiego na osi liczbowej. Zbiór U to cała oś bez punktów $x = 1$ i $x = 2$. Zbiór V to cała oś bez punktów $x = 2$ i $x = 5$. Czym jest część wspólna (przekrój) zbiorów U i V? Czy powstały zbiór jest nadal otwarty w topologii Zariskiego? (5 pkt)

b) Zadanie bonusowe: Scharakteryzuj zbiory domknięte na prostej zgodnie z definicją tej topologii (10 pkt). To zadanie celowo może wydawać się niejasne, ale chodzi o to, żeby w zasadzie przeformułować to, co to znaczy, że zbiór jest domknięty w tej topologii.

Punktacja i kwalifikacja

Nie należy szczególnie przejmować się progiem kwalifikacji na te warsztaty, moja filozofia jest następująca, każda osoba, która poświęci dostateczną ilość czasu, by zapoznać się z tymi wprowadzeniami i spróbuje zmierzyć się z tymi zadaniami powinna zostać zakwalifikowana, ale jeżeli ktoś bardzo by chciał wiedzieć, to próg kwalifikacji na pewno nie przekroczy 36 punktów.