Próg

Zrób cokolwiek. Przy okazji bardzo zachęcam do zadawania pytań przez mejla, chociaż pewnie i tak nie masz psychy.

Algebra liniowa

Algebra liniowa może się przydać, zarówno jako prosty sposób patrzenia na geometrię, jak i ogólnie Tobie w życiu. Z tego względu zostawiam tu kilka zadań z jej podstaw. Postarałem się, żeby zadania nie były trudne i sprawdzały znajomość teorii. Kluczową trudnością jest tu samodzielne nauczenie się podstaw algebry liniowej.

Zadanie 1. *Obejrzeć części 1-5, 9, 13 i 16 Essence of linear algebra od 3blue1brown na youtubie, lub w inny sposób wejść w posiadanie odpowiedniej wiedzy. W rozwiązaniu napisać "zrobione".*

Powyższe zadanie + dowolne inne dwa zadania zaliczają całą listę. Ale warto popatrzeć na wszystkie zadania, zwłaszcza jeśli nie są dla Ciebie oczywiste.

Glosariusz:
Wszystkie rozważane przestrzenie liniowe są podzbiorami $\mathbb{R}^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. W domyśle V i U to p. liniowe.

- Zbiór wszystkich liniowych kombinacji elementów z A (tzn przestrzeń liniową generowaną przez A) oznaczamy przez $span(A)$. Przyjmujemy $span(\emptyset) = \{0\}$.
- A jest liniowo niezależny, jeśli każda nietrywialna liniowa kombinacja elementów z A jest niezerowa.
- A generuje V, gdy każdy element V jest liniową kombinacją elementów z A
- A jest bazą V, jeśli jest lnz oraz generuje V
- $f : V \to U$ jest izomorfizmem p. liniowych jeśli jest liniową bijekcją.

Ważny fakt: Dowolne dwie bazy przestrzeni liniowej są równoliczne. W szczególności każda baza $\mathbb{R}^n$ ma moc n. Moc dowolnej bazy V oznaczamy przez $\dim V$ (wymiar V). Na przykład $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim\{0\} = 0$ (ta przestrzeń ma pustą bazę).

Poniższe zadania dotyczą, w moim odczuciu, najważniejszych zagadnień z podstaw ogólnej teorii.

Zadanie 2. *Niech $f : V \to U$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy $f(v) = 0 \implies v = 0$.*

Zadanie 3. *(z minusem, nie należy go odsyłać) Niech V, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będą przestrzeniami liniowymi. Udowodnić, że $V \cap U$ też jest przestrzenią liniową (to znaczy udowodnić zawieranie zera, zamkniętość na kombinacje liniowe i mnożenie przez skalar).*

Zadanie 4. *Udowodnić, że jeśli $A \subseteq V$ jest lnz, oraz $v \in V \setminus span(A)$, to $A \cup \{v\}$ też jest lnz.*

Zadanie 5. *$A \subseteq C \subseteq V$, A jest lnz, C generuje V. Pokazać, że istnieje baza B taka, że $A \subseteq B \subseteq C$. Skorzystać z poprzedniego zadania.*

Zadanie 6. *Wywnioskować z poprzedniego zadania, że jeśli $A \subseteq V$, $|A| = \dim V$ i A jest lnz, to A generuje V (więc jest bazą). Wywnioskować też, że jeśli A generuje V i $|A| = \dim V$, to A jest lnz. (uwaga: tu ważne jest założenie, że V ma skończony wymiar)*

Zadanie 7. *Pokazać, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą V, to każdy $v \in V$ zapisuje się* ***jednoznacznie*** *jako kombinacja liniowa elementów $v_1, \ldots, v_n$. Konkretnej: jeśli $c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = c'_1v_1 + \ldots + c'_nv_n$, to $c_1 = c'_1, \ldots, c_n = c'_n$.*

Zadanie 8. *Wywnioskować z poprzedniego zadania, że jeśli B jest bazą V i $f : B \to U$ jest dowolną funkcją, to f rozszerza się jednoznacznie do przekształcenia liniowego $\hat{f} : V \to U$. (zauważyć też, że jeśli obrazem f jest zbiór lnz/baza/zbiór generujący, to $\hat{f}$ jest różnowartościowa/izomorfizmem/na).*

Reszta zadań ma charakter bardziej geometryczny. W tych zadaniach ograniczymy się do $\mathbb{R}^3$

Prostą nazwiemy jednowymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbb{R}^3$ przesuniętą o wektor. Płaszczyzną nazwiemy dwuwymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbb{R}^3$ przesuniętą o wektor. Tak więc punkty prostej spełniają równanie

$$\vec{v} = \vec{u} + \lambda\vec{l} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Dla pewnych $\vec{u}$, $\vec{l} \in \mathbb{R}^3$. Dla płaszczyzny mamy

$$\vec{v} = \vec{u} + \lambda_1\vec{l_1} + \lambda_2\vec{l_2} \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Dla pewnego $\vec{u}$ i pewnych liniowo niezależnych $\vec{l_1}$ oraz $\vec{l_2}$

Zadanie 9. *Wyjaśnij w terminologii szkolnej, co znaczy, że dwa wektory w $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne.*

Zadanie 10. *Wyjaśnij w terminologii szkolnej, co znaczy, że trzy wektory w $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne.*

Poniższe zadania da się zrobić na palcach, ale po to były zadania z ogólnej teorii, żeby nie trzeba ich było tak robić.

Zadanie 11. *Dane są dwie proste przechodzące przez 0. Udowodnić, że albo są sobie równe, albo ich przecięcie to dokładnie $\{0\}$. Wskazówka: skorzystać z zadania 2, popatrzeć na moc bazy.*

Zadanie 12. *Dane są dwie płaszczyzny przechodzące przez* 0. *Udowodnić, że albo są sobie równe, albo ich przecięciem jest prosta. Wskazówka: skorzystać z tego, że każdy zbiór lnz w* $\mathbb{R}^3$ *ma moc co najwyżej* 3.

Zadanie 13. *Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że dowolne dwie różne płaszczyzny albo się nie przecinają, albo ich przecięciem jest prosta.*

Zadanie 14. *(z minusem, nie należy go odsyłać) Pokaż, że w* $\mathbb{R}^4$ *istnieją dwie płaszczyzny (podprzestrzenie wymiaru 2 przesunięte o wektor), które przecinają się w dokładnie jednym punkcie.*

Poniższe zadania mają coś wspólnego z konstrukcjami za pomocą samej linijki

Zadanie 15. *Udowodnij, że jeśli* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *jest izomorfizmem p. liniowych, to obrazem przez* f *dowolnej prostej jest jakaś prosta.*

Konstrukcją $C(X)$ za pomocą linijki ze zbioru początkowego X nazwiemy skończony ciąg operacji, z czego każda jest jednego z trzech typów:

- Zaznacz dowolny punkt leżący na prostej pomiędzy pewnymi dwoma już zaznaczonymi punktami.
- Zaznacz dowolny punkt nieleżący na żadnej prostej łączącej zaznaczone już punkty.
- Zaznacz punkt przecięcia pewnych dwóch prostych przechodzących przez 4 (niekoniecznie różne) zaznaczone już punkty.

Powiemy, że ciąg $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_{|C(X)|}$ spełnia konstrukcję $C(X)$ jeśli dla każdego i $X_{i+1} \setminus X_i = \{p\}$ i p jest zgodne z i-tą operacją $C(X)$. Zbiór takich ciągów rozpoczynających się od X_0 będziemy oznaczać przez $C(X_0)$.

Zadanie 16. *Pokazać, że jeśli* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *jest izomorfizmem p. liniowych i* $\{X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n\} \in C(X_0)$, *to* $\{f(X_0) \subseteq \ldots \subseteq f(X_{n-1}) \subseteq f(X_n)\} \in C(f(X_0))$

Zagadnienie konstrukcyjne Tartaglii przy pomocy samej linijki można teraz sformułować następująco: Konstrukcja $C(X)$ jest dobra, jeśli dla każdego X_0 zawierającego trzy punkty A, B, C takie, że $AB < BC$ i dla każdego $\{X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n\} \in C(X_0)$ mamy, że $X_n \setminus X_{n-1} = \{D\}$ takie, że D leży na BC i $|AB| = |BD|$.

Zadanie 17. *Pokazać, że nie istnieje taka konstrukcja. Wskazówka: Dowód nie wprost. Użyć poprzedniego zadania oraz zadania 8.*

Ostatnie zadanie jest już całkiem losowe

Zadanie 18. *Dany jest sześciokąt foremny. W każdym wierzchołku sześciokąta siedzi jedna bardzo smutna żaba. W środku symetrii tego sześciokąta siedzi bocian. Celem żaby jest doskoczyć do bociana. W tym celu żaba będąca w pewnym punkcie* A, *może wybrać dowolną inną żabę, stojącą w punkcie* B *i przeskoczyć ją wzdłuż prostej* AB *do punktu* C *takiego, że* $2AB = BC$ *i punkty* A, C *są po przeciwnych stronach punktu* B. *Czy istnieje ciąg ruchów, po których któraś z żab dostanie się do bociana?*