Zadania kwalifikacyjne

To nie ma tak że dobrze albo że nie dobrze

Część I: Teoria — logika klasyczna (dwuwartościowa)

W logice klasycznej albo coś jest dobrze, albo nie dobrze, czyli albo prawda (1), albo fałsz (0). Zgodnie z tym podejściem obowiązuje kilka kluczowych zasad: koniunkcja (AND), alternatywa (OR), implikacja (IF), równoważność (IFF - if and only if) oraz zaprzeczenie (NOT). Jeśli te pojęcia są tobie obce, polecam zajrzeć do Matemaksa.

Ważne prawa logiki klasycznej

Prawa De Morgana:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Prawo podwójnej negacji:

$$\neg\neg p \equiv p$$

Prawo wyłączonego środka:

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$$

Prawo niesprzeczności:

$$\neg(p \wedge \neg p) \equiv \mathbf{T}$$

Komutywność i łączność koniunkcji i alternatywy:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p, \qquad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Część II: Logika trójwartościowa Kleene'a (K3)

A teraz już bliżej tematu warsztatów. Czasem nie da się jednoznacznie stwierdzić że coś jest prawdziwe albo fałszywe, datego mamy wiele rodzajów logiki wielowartościowej, o czym będzie więcej na warsztatach. W zadaniach kwalifikacyjnych będzie jedynie K3 - trójwartościowe logika Kleene'a. Logika Kleene'a (**K3**) rozszerza zbiór wartości logicznych o trzecią wartość: $\{\mathbf{F}, \mathbf{I}, \mathbf{T}\}$, gdzie **I** to „nie wiem", a wynik operacji wyznaczony jest tylko kiedy **nie zależy** od **I**.

2.1 Tablice wartości w K3

p	$\neg p$
T	**F**
I	**I**
F	**T**

$p \wedge q$	**T**	**I**	**F**
T	**T**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

$p \vee q$	**T**	**I**	**F**
T	**T**	**T**	**T**
I	**T**	**I**	**I**
F	**T**	**I**	**F**

$p \to q$	**T**	**I**	**F**
T	**T**	**I**	**F**
I	**T**	**I**	**I**
F	**T**	**T**	**T**

$p \leftrightarrow q$	**T**	**I**	**F**
T	**T**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**I**
F	**F**	**I**	**T**

Kluczowe obserwacje:

- **T** $\wedge$ **I** $=$ **I** — skoro nie wiemy, jaka jest wartość q, nie wiemy, czy koniunkcja jest prawdziwa.
- **F** $\wedge$ **I** $=$ **F** — nawet jeśli nie znamy q, fałszywy składnik „przesądza" fałsz koniunkcji.
- **T** $\vee$ **I** $=$ **T** — prawdziwy składnik „przesądza" prawdziwość alternatywy.
- **F** $\to$ **I** $=$ **T** — implikacja z fałszywym poprzednikiem jest zawsze prawdziwa (jak w logice klasycznej).
- **Prawo wyłączonego środka zawodzi:** $p \vee \neg p$ może przyjąć wartość **I** (gdy $p =$ **I**).
- **Prawo niesprzeczności zawodzi:** $p \wedge \neg p$ może przyjąć wartość **I** (gdy $p =$ **I**).

2.2 Przykład obliczenia tablicy w K3

Oblicz wartości formuły $\neg p \to (p \wedge q)$ dla wszystkich kombinacji wartości w K3.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \to (p \wedge q)$
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**I**	**F**	**I**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**
I	**T**	**I**	**I**	**I**
I	**I**	**I**	**I**	**I**
I	**F**	**I**	**F**	**I**
F	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**I**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

Wniosek: Formuła nie jest tautologią K3 (przyjmuje wartość **F** np. dla $p =$ **F**, $q =$ **T**). Nie jest też sprzecznością — przyjmuje wartości **T**, **I** i **F**.

Część III: Zadania

Zadanie 1 — Tablice prawdy w logice klasycznej (5 punktów)

Każde z poniższych czterech pytań zawiera zdanie w języku naturalnym oraz cztery formuły. Wskaż która formuła jest poprawnym tłumaczeniem danego zdania na język logiki zdaniowej.

Klucz translacyjny:

- R: Skończył się ser.
- P: Prowadzący kupili więcej sera.
- S: Uczestnik je tosty.

a. Jeśli skończył się ser, to uczestnik je tosty tylko wtedy, gdy prowadzący kupili więcej sera.

(i) $R \to (S \leftrightarrow P)$

(ii) $R \to (P \to S)$

(iii) $(R \wedge P) \to S$

(iv) $R \to (S \to P)$

b. Nieprawda, że jeśli nie skończył się ser, to prowadzący kupili więcej sera lub uczestnik je tosty.

(i) $\neg(\neg R \to \neg(P \vee S))$

(ii) $\neg R \to \neg(P \vee S)$

(iii) $\neg(\neg R \to (P \vee S))$

(iv) $\neg R \wedge \neg P \wedge \neg S$

Zadanie 2 — Tablice prawdy: tautologie i prawa logiczne (5 punktów)

Czy formuła $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$ jest tautologią? Uzupełnij tablicę prawdy i uzasadnij odpowiedź.

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Zadanie 3 — Tablice prawdy w logice Kleene'a K3 (5 punktów)

a. Uzupełnij poniższą tablicę dla formuły $(p \vee \neg p)$ w K3 i odpowiedz, czy jest to tautologia K3.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T		
I		
F		

Czy $p \vee \neg p$ jest tautologią K3? Uzasadnij.

Zadanie 4 — Porównanie logiki klasycznej i K3 (10 punktów)

Każde z poniższych sześciu stwierdzeń dotyczy porównania logiki klasycznej i logiki K3. Wskaż, czy stwierdzenie jest **prawdziwe** czy **fałszywe**, i uzasadnij krótko swoją odpowiedź.

Stwierdzenie	**P**	**F**	**Uzasadnienie**
(a) Każda tautologia logiki klasycznej jest tautologią K3.			
(b) Każda tautologia K3 jest tautologią logiki klasycznej.			
(c) W K3 prawo wyłączonego środka $p \vee \neg p$ jest tautologią.			
(d) W K3 z $p = \mathbf{I}$ i $q = \mathbf{I}$ wynika, że $p \wedge q = \mathbf{I}$.			
(e) W K3 z $p = \mathbf{I}$ i $q = \mathbf{F}$ wynika, że $p \wedge q = \mathbf{F}$.			
(f) Negacja wartości **I** w K3 wynosi **I**.			

Zadanie 5 — Pytania otwarte (8 punktów)

Wyjaśnij własnymi słowami, dlaczego w logice Kleene'a K3 trzecia wartość **I** jest interpretowana jako „nieokreślona", a nie po prostu jako trzecia, odrębna wartość logiczna. Podaj jeden przykład sytuacji (spoza matematyki), w której K3 może być użyteczna.

W logice klasycznej $p \to q$ jest równoważne $\neg p \vee q$. Sprawdź obliczeniowo (dla jednego wybranego wiersza tablicy z $p = \mathbf{I}, q = \mathbf{T}$), czy ta równoważność zachodzi również w K3.

> Zrób tyle ile dasz radę, nie musi to być wszystko. Korzystanie z LLM-a do zrobienia zadań poskutkuje trochę zmarnowanym czasem na warsztatach, więc lepiej rozwiąż je sam, nawet jeśli to będzie tylko połowa lub mniej. Jeśli jakieś zadanie nie jest jasne, a szukanie pomocy w Internecie nie pomogło, to zawsze możesz wysłać mi maila na kaniakozikowska@gmail.com.