

Pokombinujmy!

Zadania Kwalifikacyjne
WWW 22

Piotr Horodecki

Wstęp

Przed zadaniami będą przedstawione definicje przydatne przy rozwiązywaniu zadań oraz których znajomości będę oczekiwał na warsztatach, przy czym większość z nich już teraz powinna być znana.

Do kwalifikacji nie jest wymagane rozwiązanie wszystkich zadań, ale zachęcam do spróbowania rozwiązania każdego z nich, a w przypadku gdy nie potraficie w pełni rozwiązać zadania, wysłać jego częściowe rozwiązanie. Niektóre z zadań są oznaczone gwiazdką i nie oczekuję ich zrobienia, ale zachęcam do spróbowania.

Rozwiązania wszystkich przedstawionych zadań można znaleźć w internecie, w szczególności AI jest w stanie je bez problemu rozwiązać. Zalecam jednak rozwiązanie ich samemu, bo na warsztatach będę oczekiwał umiejętności rozwiązania tego typu zadań (wyłączając zadania z *).

Rozwiązania zadań można wysłać poprzez stronę warsztatów. Forma jest dowolna tak długo jak jest czytelna. Nie trzeba wyliczać dokładnych liczb. Wszelkie pytania można zadawać poprzez email: phorod05@gmail.com lub poprzez Discord.

Definicje do zadań - zliczanie

Reguła dodawania

Licząc elementy należące do dwóch rozłącznych zestawów dodajemy liczby obiektów z obu.

Twierdzenie 1 (Reguła dodawania). *Jeśli A i B są rozłącznymi zbiorami skończonymi, to:*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Reguła mnożenia

Licząc na ile sposobów możemy wybrać elementy z jednego zestawu, a następnie z drugiego możemy pomnożyć liczbę sposobu wyboru elementów obu (Liczba sposobów wyboru z drugiego zbioru nie może zależeć od liczby sposobu wyborów z pierwszego).

Twierdzenie 2 (Reguła mnożenia). *Jeśli A i B są zbiorami skończonymi, to:*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Reguła bijekcji

Metodę bijekcji stosujemy jeśli chcemy zliczyć obiekty, które możemy przemapować (znaleźć bijekcję), na problem łatwiejszy do rozwiązania. (Bijekcja, to funkcja różnowartościowa, której zbiór wartości jest równy przeciwdziedzinnie. Dziedziny i przeciwdziedzina bijekcji są równoliczne.)

Twierdzenie 3 (Reguła bijekcji). *Jeśli A i B są zbiorami skończonymi, oraz istnieje bijekcja $f : A \rightarrow B$ to:*

$$|A| = |B|$$

Permutacje

Permutacja zbioru X na to bijekcja na samą siebie. Często utożsamiamy je jako ustawianie obiektów w kolejności. Permutacji zbioru n -elementowego jest:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

Kombinacje bez powtórzeń

Kombinacją bez powtórzeń nazywamy dowolny podzbiór zbioru skończonego. Dla n -elementowego zbioru można wybrać k -elementowy podzbiór na $\binom{n}{k}$ sposobów. Przy czym:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją bez powtórzeń nazywamy dowolny różnowartościowy ciąg elementów dowolnego podzbioru zbioru skończonego. k -elementowych wariacji bez powtórzeń z elementami ze zbioru n -elementowego jest:

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)! = \frac{n!}{(n - k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją z powtórzeniami nazywamy dowolny ciąg elementów dowolnego podzbioru zbioru skończonego. k -elementowych wariacji z powtórzeniami z elementami ze zbioru n -elementowego jest:

$$n^k$$

Wzór dwumianowy (Newtona)

Wzór ten powinien być już znany z liceum, można go użyć do wykazania kilku użytecznych własności.

Twierdzenie 4 (Wzór dwumianowy). *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Współczynnik wielomianowy

Współczynnik, który można użyć do skrócenia zapisu i poprawy czytelności w niektórych sytuacjach. Występuje zamiast w uogólnieniu wzoru dwumianowego na więcej składników. Można go używać, ale nie ma takiej potrzeby.

$$\binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k} = \binom{n}{i_1} \binom{n-i_1}{i_2} \cdots \binom{i_k}{i_k}$$

Dowód kombinatoryczny

Przy zliczaniu często będziemy się opierać tzw. dowodach kombinatorycznych. Polegają one na znalezieniu interpretacji kombinatorycznej dla obu stron równania i pokazaniu, że zliczają one to samo. Przykładowo wzór dwumianowy można udowodnić w następujący sposób:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_n$$

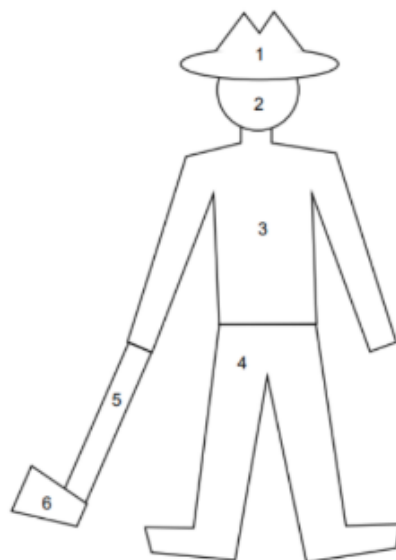
Dla każdego $a^k b^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ wybieramy z których k nawiasów bierzemy a . Możemy je wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów skąd dostajemy: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Zliczanie zadania

Seria 1 (1 punkt za każde zadanie)

To są bardziej zadania rozgrzewkowe, nie powinno z nimi być żadnych problemów.

1. Rysunek drwala składa się z 6 obszarów. Każdy z tych obszarów należy pokolorować jednym z siedmiu kolorów w taki sposób, aby każde dwa obszary graniczące ze sobą miały inny kolor.



2. Na ile sposobów można 10 osób w kolejce, na ile sposobów można je ustawić jeśli maksymalna długość kolejki wynosi 7.
3. Na ile sposobów można usadzić 10 osób przy okrągłym stole (nierozróżniamy miejsc).
4. Ile różnych słów (nie muszą być prawdziwe) można utworzyć ze wszystkich liter słowa "MATEMATYKA".
5. W pewnej grupie jest 8 chłopców i 6 dziewczynek na ile sposobów można je podzielić na jednosobowe, jedno płciowe grupy.
6. Ile jest liczb co najwyżej 5-cyfrowych, ile jest liczb dokładnie 5 cyfrowych, ile jest parzystych liczb 5-cyfrowych.

Seria 2 (2 punkty za każde zadanie)

W zadaniach gdzie jest napisane "uzasadnij", nie ma potrzeby na formalny dowód, po prostu trzeba wyjaśnić skąd się to bierze.

1. Udowodnij zasady dodawania, mnożenia i bijekcji.
2. Uzasadnij wzory na liczby permutacji, kombinacji bez powtórzeń oraz wariacji z lub bez powtórzeń.
3. Na ile sposobów można ustawić n elementów w cykl.

Seria 3 (3 punkty za każde zadanie)

1. Udowodnij kombinatorycznie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. Udowodnij kombinatorycznie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

3. Udowodnij kombinatorycznie:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

4. *Udowodnij:

$$\sum_{k - \text{nieparzyste}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k - \text{parzyste}}^n \binom{n}{k}$$

Grafy definicje

Graf

Grafem nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V -zbiór wierzchołków oraz E -zbiór krawędzi.

- Jeśli $E \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ to graf jest nieskierowany.
- Jeśli $E \subset \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ to graf jest skierowany.
- Jeśli graf nie zawiera krawędzi postaci $\{v, v\}$ (lub (v, v)) to mówimy, że jest bez pętli.

Poniższe zadania będą odnosiły się wyłącznie do grafów nieskierowanych, bez pętli.

Kilka podstawowych pojęć

- **Klika** (lub graf pełny) to graf, który ma maksymalną możliwą liczbę krawędzi. Klikę oznaczamy poprzez K_n .
- **Drogą** w grafie G nazywamy dowolny ciąg $n \geq 1$ wierzchołków v_1, \dots, v_n , taki że $v_i v_{i+1} \in E$ dla $i = 1, \dots, n-1$.
- **Ścieżką** w grafie G nazywamy dowolny ciąg $n \geq 1$ wierzchołków parami różnych wierzchołków v_1, \dots, v_n , taki że $v_i v_{i+1} \in E$ dla $i = 1, \dots, n-1$.
- **Cykle** w grafie G nazywamy dowolny ciąg $n \geq 1$ wierzchołków parami różnych wierzchołków v_1, \dots, v_n , taki że $v_i v_{i+1} \in E$ dla $i = 1, \dots, n-1$ oraz $v_n v_1 \in E$.
- Powiemy, że graf $G = (V, E)$ jest **spójny** jeśli dla dowolnych $u, v \in V$ istnieje droga (równoważnie ścieżka) w G , która zaczyna się w u , a kończy w v .
- Powiemy, że graf $G = (V, E)$ jest **acykliczny**, jeśli nie zawiera żadnego cyklu.
- **Drzewem** nazywamy graf spójny i acykliczny. Graf acykliczny nazywamy **Lasem**.
- **Sąsiedztwem** wierzchołka nazywamy zbiór jego sąsiadów w G . $N(u) = \{v \in V : uv \in E\}$.
- **Stopniem** wierzchołka nazywamy liczbę jego sąsiadów. $d(u) = |N(u)|$.

Zadania grafy - wszystkie po 2 punkty

1. Ile krawędzi ma klika n -elementowa K_n .
2. Ile wynosi suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie.
3. Wierzchołki o stopniu 1 w drzewie nazywamy liśćmi. Ile co najmniej liści musi mieć drzewo.
4. Udowodnij, że jeśli $G = (V, E)$ jest grafem spójnym oraz $uv \in E$, to graf G z usuniętą krawędzią uv jest spójny wtw. gdy uv jest krawędzią w pewnym cyklu G .
5. *Niech $T = (V, E)$ będzie grafem. Wówczas następujące warunki są równoważne:
 - (a) T jest drzewem.
 - (b) T jest grafem acyklicznym oraz $|E| = |V| - 1$.
 - (c) T jest grafem spójnym oraz $|E| = |V| - 1$.

Udowodnij to twierdzenie. (Tego typu twierdzenia najczęściej dowodzi się poprzez pokazanie $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$ lub na odwrót). Każda z tych implikacji liczy się jako osobne zadanie.