Czy dwie nieskończoności mogą być różne?

Przed rozpoczęciem:
Nie musisz rozwiązać wszystkich zadań, aby się zakwalifikować. :)
Zależy mi na tym, aby zobaczyć, ile umiesz, dlatego proszę, nie korzystaj z AI do rozwiązania tych zadań. Swoje rozwiązania zamieść na stronie warsztatów. Za każde zadanie do zdobycia jest 10 punktów.
Powodzenia!

Zadanie 1 (to zadanie jest na dodatkowe punkty):
Napisz kilka zdań o sobie i dlaczego chciałbyś/chciałabyś wziąć udział w tych warsztatach.

Kwantyfikatory:
Matematycy, aby ułatwić sobie życie, często zamiast pisać coś słowami, używają śmiesznych znaczków zwanych kwantyfikatorami. Najważniejsze z nich to:

- $\forall$ oznacza dla każdego,
- $\exists$ oznacza istnieje,
- $\implies$ oznacza implikację, czyli jeśli zdanie po lewej stronie jest prawdziwe, to prawdziwe jest również zdanie po prawej stronie,
- $\Leftrightarrow$ oznacza wtedy i tylko wtedy, czyli zachodzi równoważność: jeśli zachodzi zdanie po lewej stronie, to zachodzi też zdanie po prawej, i odwrotnie.

Zadanie 2:
Zapisz poniższe zdania słownie (czyli co one znaczą bez używania kwantyfikatorów):

a) Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **surjekcją** (funkcją "na") gdy:

$$\forall_{y \in Y} \ \exists_{x \in X} \ f(x) = y$$

b) Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **iniekcją** (funkcją 1-1 lub różnowartościową) gdy:

$$\forall_{a,b \in X} \ a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$

Operacje na zbiorach:
Niech A i B będą pewnymi zbiorami. Wówczas:

- $A \cup B$ oznacza sumę zbiorów A i B, czyli zbiór wszystkich elementów, które należą do A lub do B (element należący jednocześnie do A i B występuje w sumie tylko raz),
- $A \cap B$ oznacza przecięcie zbiorów A i B, czyli zbiór wszystkich elementów, które należą jednocześnie do A i do B,

- $A \setminus B$ oznacza różnicę zbiorów A i B, czyli zbiór wszystkich elementów, które należą do A i nie należą do B.

Zadanie 3:
Niech $A = \{a \in \mathbb{Z} : -5 < a < 1\}$, $B = \{b \in \mathbb{Z} : b < -2\}$ i $C = \{c \in \mathbb{Z} : c \text{ jest nieparzyste}\}$. Oblicz:

a) $A \cup B$

b) $A \cap C$

c) $C \setminus B$

d) $B \setminus (C \cup A)$

Indukcja matematyczna:
Schemat dowodu indukcyjnego:

1. Sprawdzamy, że prawdziwe jest T(1) (wartość zdania dla początkowej liczby, na przykład dla liczb naturalnych przyjmujemy, że jest to n=1).
2. Dowodzimy, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja:
$$T(n) \implies T(n+1)$$
3. Na podstawie 1. oraz 2. wyciągamy wniosek, że zdanie T(n) jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 4:
Udowodnij przy użyciu indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

Uwaga: Na potrzeby zadania przyjmij, że liczby naturalne zaczynają się od 1.

Bijekcja:
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **bijekcją** jeśli jednocześnie jest surjekcją i iniekcją (patrz zadanie 2).

Zadanie 5:
Udowodnij, że jest bijekcja między:

a) liczbami naturalnymi, a parzystymi liczbami naturalnymi,

b) liczbami całkowitymi, a dodatnimi liczbami całkowitymi.

Paradoks Hilberta:
W Warsztatolandii istnieje nieskończony hotel z nieskończenie wieloma pokojami. Są one ponumerowane liczbami naturalnymi. W maju każdy pokój jest zajęty. 10 maja do hotelu przyjeżdża nowy gość. Recepcjonistka, aby znaleźć dla niego miejsce w hotelu, bez wysyłania nikogo do domu może przekwaterować gości z pokuju o numerze n do pokoju o numerze n+1. Dzięki temu pokój numer 1 pozostanie pusty i można zakwaterować tam nowego przybysza w tym pokoju.

Zadanie 6:
Do tego samego hotelu 15 maja przyjeżdża nieskończenie wiele autobusów, z których każdy ma nieskończenie wiele pasażerów. Co tym razem mogą zrobić recepcjoniści, aby zakwaterować w swoim hotelu wszystkich gości tak, żeby każdy dostał swój własny pokój?

Wskazówka: Zacznij od prostszego przypadku — jednego autobusu.