Zadania kwalifikacyjne na WWW16
„Mechanika Newtona i Einsteina*

17 lutego 2020

1 Wstęp

Wersja alfa 1.3 Uwaga na błędy!

1.1 Słowo Wstępu

Zanim zaczniesz rozwiązywać zadania warto żebyś zapoznał się z wymaganiami i materiałami[1] edukacyjnymi „przed warsztatami". Deadline jest taki jak na stronie WWW16.
Zadania proszę przysyłać w formacie PDF (sugerowany latex) lub skanów, wrzuconych do PDF'a lub odpowiednio **ponumerowanymi plikami** na email: ag9@onet.eu
W razie konkretnych pytań/wątpliwości co do zadań/pytań natury ogólnej/ogólnej chęci rozmowy można do mnie pisać.

W tytule e-maila proszę o użycie formatu: [WWW16] Temat[2] Imię Nazwisko.
Umożliwi mi to sprawniejsze sprawdzanie zadań. Jeżeli twoja wiadomość nie otrzymała odpowiedzi w przeciągu kilku dni, prosiłbym o ponowne wysłanie.(Co raczej nie powinno się zdarzyć.)
Polecam też wysyłać jak najwcześniej swoje rozwiązania, można by wtedy poprawić. Obecnie też nie mam też bladego pojęcia ile, będzie wynosił próg(chociaż zgaduje że nie będzie za wysoki) ani czy te zadania są za łatwe lub za trudne

Jako że planuje na tych zajęciach mówić o fizyce, potrzebujemy wyrobić sobie odpowiedniego języka do mówienia o niej. Tym językiem jest matematyka i właśnie na niej skupię się w tych zadaniach kwalifikacyjnych.

2 Zadania

Jeżeli czytelnik po raz pierwszy spotyka się pojęciem „pochodnej" lub „całki" należy najpierw zapoznać się ze skryptem lub obejrzeć „Essence of Calculus" na yt klik. Następnie warto by żeby czytelnik jeszcze przerobił parę przykładów chociażby te klik, a dla zaznajomionych z tematem polecam przerobić te parę z tych dla przypomnienia klik zadanie 7.

*Nazwa Robocza
[1] pojawią się
[2] Np. Zadanie / Pytanie dot zadania nr itd.

2.1 Rozgrzewkowe zadania

Są to ćwiczenia wprowadzające do reszty zadań, więc zrób je w pierwszej kolejności...

Ćwiczenie 1 (1pkt.)
Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = x^2 \sin(x)$$

$$g(x) = \cos(x)\sin(x)$$

Ćwiczenie 2 (1 pkt.) Oblicz

$$\int \sin(x)\cos(x)dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

Ćwiczenie 3 (0,5 pkt.) Podaj jedną dowolną fizyczną interpretacje pochodnej po czasie funkcji.

2.2 Właściwe zadania

Zadanie 1 (2pkt.)
Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{((1 + a\cos(x))^2} dx = 0,$$

gdzie $1 > a > 0$.

Wskazówka do zadania 1: Co można szczególnego powiedzieć o funkcji podcałkowej, zobacz jak jej wygląda wykres, dla przykładowych wartości a.

Wskazówka do zadań 2, 3, 4 i 6.
Siła F_x działająca na ciało, w kierunku x będące w polu o potencjale V, zależnością

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

W szczególności V może być funkcją wielu zmiennych.
W zadaniach 2, 3, 4, 5 i 6 rozważamy jednowymiarowy ruch na osi x.

Zadanie 2 (2pkt.)
Rozwiąż równania ruchu[3] dla cząstki o masie m w polu o potencjale (1 pkt.)

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

Podaj przykład układu fizycznego opisywanego, przez te równanie. (1pkt.)

Zadanie 3 (2pkt.)
Rozwiąż równania ruchu i znajdź przebytą w czasie od 0 do T, (warunek początkowy: $v(0) = 0$) dla cząstki o masie m w potencjale:

$$V = -kx[\cos^2(t) - \sin^2(t)]$$

[3] tj. znajdź zależność $x(t)$

Zadanie 4. (2pkt.) Pokaż, że równanie Eulera-Lagrange spełniają równania Newtona[4], dla uproszczenia załóż że ruch jest jednowymiarowy.
Wskazówka: Równanie E-L w jednym wymiarze:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}} - \frac{dL}{dx} = 0$$

,gdzie $\dot{x}$ oznacza pochodna po czasie z x. L jest tzw. langrażjanem.

Zadanie 5 (4 pkt.)
Rozważmy ruch cząstki o masie m w pewnym polu, które jest zachowawcze. Rozważamy ruch wzdłuż osi OX.
a)Co to znaczy, że siła jest zachowawcza(pole jest zachowawcze)? (1pkt.)
b)Pokaż że równania ruchu, są rozwiązaniem takiego równania całkowego: (3pkt.)

$$\int \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - mV(x)}} = \int dt,$$

przy czym całki są w odpowiednich graniach, jakie to granice? Czym jest E i $V(x)$, w szczególności czy $V(x)$ istnieje ?
Wsk. Z odpowiedzi na pytanie a) wynika b).
Wsk. Mamy jakaś funkcje różniczkowalna $x(t)$, to wtedy można zrobić przejścia

$$(x'(t))^2 = (\frac{dx}{dt})^2 = A \Rightarrow \int dx = \int dt\sqrt{A},$$

gdzie A liczba.
Zadanie 6 (5 pkt.)
Rozważmy ruch cząstki o masie m, który odbywa wzdłuż osi OX pod wpływem jakieś siły. Niech dane jest równanie ruchu:

$$x(t) = A\sinh(\omega t)$$

Czy ten podczas tego ruchu jest zachowana energia? Odpowiedz uzasadnij rachunkiem.
Dla uproszczenia rachunków, możesz założyć, że $\omega = 1$. (Omega jest jakimś współczynnikiem wymiarowym i zawsze można dobrać jednostki w ten sposób, żeby to zdanie było prawdziwe.)
Wskazówki:

1. Najpierw spróbuj rozwiązać zadanie 5.
2. Więcej o funkcji $\sinh(x)$ przeczytasz tu klik. W szczegolności przyda Ci się wzór na pochodną sinusa hiperbolicznego i jedynkę hiperbolicznej.

[4] $F = ma$

3 Dodatek, skrypt przygotujący

Wersja prealfa 0.1

3.1 Pochodna

Jeżeli czytelnik zna pojęcie pochodnej, może pominąć ten podrozdział.

Rozważmy dowolną liczbową funkcję $f(x)$.(dziedzina i przeciwdziedzina to jakiś podzbiór liczb rzeczywistych)
Pochodną $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy napis: (zaraz się rozjaśni co on znaczy)

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Jak widać pochodną w tym punkcie oznaczamy $f'(x_0)$. Z technicznego punktu widzenia jedynym nowością dla kogoś z liceum powinno być

$$\lim_{h\to 0}$$

reszta to dodawanie i dzielenie liczb. Z intuicyjnego punktu oznacza on, że h „dąży" do 0. Żeby zapoznać lepiej co mamy na myśli rozważmy przykład.

Przykład 3.1. $f(x) = x^2$. *Obliczmy pochodną tego punktu dla pewnego ustalonego punktu* x_0 *(jeżeli czytelnik uzna to pomocne może myśleć, że np.* $x_0 = 2$*, bez znaczenia) Wtedy podstawiając do definicji, mamy:*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

Zapomnijmy o nowym członie lim *i policzmy resztę „normalnie".*

$$\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h - x^2}{h} = 2x_0 + h$$

Dostajemy liczbę $+h$*, to teraz przejdźmy do wykonania napisu* $\lim_{h\to 0}$*, czyli wykonajmy granicę. (tak to się nazywa).*
Skoro h, „dąży do" 0 to możemy to zaniedbać, czyli otrzymujemy

$$f'(x_0) = 2x_0$$

Skoro obliczyliśmy dla każdego punktu to możemy powiedzieć, że w każdym punkcie ją obliczyliśmy. To koniec obliczyliśmy naszą pochodną. □
Jeżeli to czytasz proszę wyślij mi wiadomość o treści „okoń". Zastawiam się jaki jest sens pisania tego
To obliczenie pochodnej nie rożni się niczym szczególnym od formalnej definicji, trzeba by zamienić odpowiednie oznaczania na ciągi i rozważyć granicę ciągów(coś co czytelnik mógł spotkać w liceum). Warto na koniec zaznaczyć, że wszystkie operacje, które dokonaliśmy pod lim *były dozwolone.*

Dla jeszcze lepszego zrozumienia niech zrobimy jeszcze parę przykładów

Przykład 3.2. *Pokażemy, że* $(af(x))' = (af'(x))$ *mamy z definicji:*

$$(a \cdot f(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot f(x+h) - a \cdot f(x)}{h} = a \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \cdot f'(x))$$

A teraz coś bardziej rachunkowo wyrafinowanego

Przykład 3.3. *Obliczmy pochodną* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x)}}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Więcej przykładów czytelnik może przeczytaj tutaj klik.