Symetrie - zadania kwalifikacyjne

May 16, 2019

1 Wysyłanie zadań

Zadania można wysyłać na maila: marcin.oczk@gmail.com temat: WWW15[Imię i nazwisko]. Wysyłanie plików w formacie PDF (najlepiej tex) ułatwi mi pracę i przyspieszy sprawdzanie :) . Zachęcam do wysyłania nawet częściowych rozwiązań jeżeli ma się problem z danym zadaniem lub są jakiekolwiek niejednoznaczności w treści. Nie trzeba rozwiązywać wszystkich zadań ale polecam zrobić chociaż po kilka z każdej sekcji.

2 Wstęp

Grupą nazywany zbiór z działaniem dwuargumentowym $(G, \cdot)$. Posiadającym własności:
(skrótowo zapisujemy $a \cdot b = ab$)

1. Łączność: $\forall_{a,b,c \in G} : a(bc) = (ab)c$

   Z własności tej wynika że zapisując działania możemy pomijać nawiasy.

2. Wewnętrzność: $\forall_{a,b \in G} : ab \in G$

   Oznacza to mniej więcej tyle, że działanie nie "wyrzuci" nas poza grupę.

3. Element neutralny: $\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} : ae = a$

4. Element odwrotny: $\forall_{a \in G} \exists_{b \in G} : ab = e$

   Element odwrotny do elementu a zwykle zapisujemy a^{-1}

5. O grupie dla której $\forall_{a,b \in G} : ab = ba$ powiemy, że jest abelowa.

W ten sposób możemy wykonywać operacje na rówaniach jak np.

$$aba^{-1} = aca^{-1} \,|\cdot a$$

$$aba^{-1}a = aca^{-1}a$$

$$abe = ace$$

$$ab = ac \,|a^{-1}\cdot$$
$$a^{-1}ab = a^{-1}ac$$
$$eb = ec$$
$$b = c$$

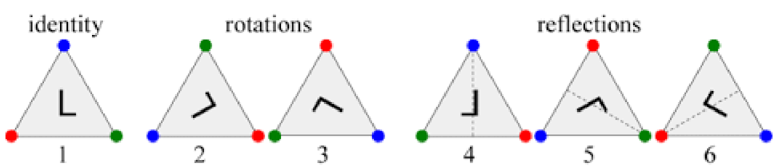
3 Przykłady grup

Czy podane obiekty to grupy? Odpowiedź uzasadnij.

1. $(\{2k\ : k \in \mathbb{Z}\}, +)$ 1pkt
2. $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ z operacją mnożenie modulo 10 1pkt
3. $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ z operacją mnożenie modulo 11 1pkt
4. $(\{2^k\ : k \in \mathbb{Z}\}, *)$ 1pkt
5. $(\{a \cdot 2^k | a \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}, *)$ 1pkt

4 Trochę geometrii

Rozważmy symetrie trójkąta:



Każda z nich jest pewnym działaniem na trójkącie (nie robienie niczego czyli identyczność też jest tu działaniem) .Tu elementami grupy są te operacje, a działaniem jest wykonywanie operacji jedna po druiej (zwykle nazywamy to "składaniem"). Na przykład wykonanie dwa razy operacji o numerze 2 (rotacji) da nam w efekcie sytuacje jak w operacji o numerze 3. Odpowiedz na poniższe pytania (oczywiście z uzasadnieniem):

1. Czy powyższe operacje wraz ze składaniem tworzą grupę? 1pkt
2. Czy kolejność wykonywania operacji ma znaczenie? 1 pkt
3. Czy istnieją dodatkowe symetrie, które nie zostały wymienione powyżej? 2pkt
4. Czy w skończnonych grupach dla każdego elementu $a \in G$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $a^n = e$? 3pkt

   (Dla skrócenia zapisu $\underbrace{aaa...a}_{n}$ zapisujemy jako a^n)

5. Wykonaj punkty 1 i 2 i wypisz wszystkie symetrie dla kwadratu 6pkt
6. Podaj przykład figury która:
   (a) ma 12 symetrii (wliczając identyczność) 4pkt
   (b) ma przemienne symetrie 2pkt

5 Podgrupy i homomorfizmy

Homomorfizm grup to funkcja $f : (G, *) \rightarrow (H, \cdot)$. spełniająca następujący warunek : $f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$.

Weźmy na przykład $f : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \rightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$, które liczbie wymiernej przyporządkowuje jej znak.

Dowód tego że jest to homomorfizm można zacząć od zauważenia, że mnożenie dwóch liczb zwraca liczbę dodatnią $\iff$ obie są dodatnie lub obie są ujemne. Zaś ujemną $\iff$ obie są różnych znaków.

Teraz wystarczy rozważyć 4 przypadki $((+,+),(-,-),(+,-),(-,+))$ i pokazać że dla każdego z nich zachodzi warunek homomorfizmu.

Tutaj na przykład sprawdzamy waruenk dla $(-,-)$

$$f(ujemna \cdot ujemna) = f(dodatnia) = 1$$

$$f(ujemna \cdot ujemna) = f(ujemna) \cdot f(ujemna) = -1 \cdot -1 = 1$$

Analogicznie sprawdzamy warunek dla pozostałych trzech przypadków.

H nazywamy podgrupą grupy G jeżeli:

1. H jest grupą
2. elementy grupy H należą do grupy G
3. grupa H ma to samo działanie co G (działanie nie wyrzuca nas poza podgrupę)

Przykładem podgrupy mogą być liczby parzyste zawarte w liczbach całkowitych (z dodawaniem)

Odpowiedz na pytania (z uzasadnieniem):

1. Czy $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +), f(x) = 2x$ jest homomorfizmem? 2pkt

   ($2\mathbb{Z}$ to liczby całkowite parzyste)
2. Czy $f(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +), f(x) = -2x$ jest homomorfizmem? 2pkt
3. Czy funkcja f, który przyjmuje symetrie trójkąta z działaniem składania i zwraca: 1 dla rotacji i identyczności (operacje 1,2,3) oraz -1 dla odbić (operacje 4,5,6) z działaniem mnożenia, jest homomorfizmem? 2 pkt

4. Wskaż wszystkie podgrupy symetrii trójkąta 3pkt

5. Wskaż wszystkie podgrupy grupy $(\{0, 1, 2, 3, ..., 7\}, +_{mod8})$ 2pkt

6. Wskaż wszystkie podgrupy grupy $(\{1, 2, 3, ..., 6\}, \cdot_{mod7})$ 2pkt

7. * Czy rząd podgrupy musi zawsze dzielić rząd grupy (rozważamy grupy skończone)? 4pkt

   (Rzędem grupy nazywa ilość jej elementów)