WWW15 Zadania Kwalifikacyjne v1.1

Adam Gonstal

17 maja 2019

1 Słowo Wstępu

Wersja wstępna możliwe, są przyszłe korekty błędów językowych. Edit v1.1: Pierwsza wersja poprawiona z korektą niektórych błędów i sprecyzowaniem co to za zbiór $\mathbb{N}_0$.

Zanim zaczniesz rozwiązywać zadania od części 3 warto żebyś zapoznał się z wymaganiami i materiałami edukacyjnymi „przed warsztatami". Deadline jest taki jak na stronie WWW15. Zadania proszę przysyłać w formacie PDF (sugerowany latex) lub skanów, wrzuconych do PDF'a lub odpowiednio ponumerowanych na email: ag9@onet.eu
W razie pytań/wątpliwości co do zadań/pytań natury ogólnej można do mnie pisać.

W tytule e-maila proszę o użycie formatu: [WWW15] Temat[1] **Imię Nazwisko**. Umożliwi mi to sprawniejsze sprawdzanie zadań. Jeżeli twoja wiadomość nie otrzymała odpowiedzi w przeciągu kilku dni, prosiłbym o ponowne wysłanie.(Co raczej nie powinno się zdarzyć.)
Polecam też wysyłać jak najwcześniej swoje rozwiązania, można by wtedy poprawić. Obecnie też nie mam też bladego pojęcia ile, będzie wynosił próg(chociaż zgaduje że nie będzie za wysoki) ani czy te zadania są za łatwe lub za trudne.

2 Poznajmy się

Opowiedz w paru zdaniach o sobie, w których odpowiesz na pytania:

1. Jak się rozwijasz poza szkołą? (Jesteś może stypendystą KRnFD/brałeś udział w jakiś olimpiadach)
2. Czy miałeś jakaś styczność z topologią/metrykami?
3. Czego oczekujesz od tych warsztatów?

Jak chcesz, możesz dodać coś od siebie ale bądź zwięzły. **Uwaga!** Odpowiedź na tą część jest warunkiem koniecznym dostania się na moje Warsztaty, lecz nie będzie ona w żadnym stopniu brana pod ocenę, przy ostatecznej kwalifikacji.[2]

[1] Np. Zadanie / Pytanie dot zadania nr itd.

[2] Czyli np. osoba z ze złotym medalem z IMO i taka co nigdy nie brała udziału w żadnej olimpiadzie, ma takie same szanse dostania się.

3 Włąściwe Zadania

W zadaniach rozważamy, tylko zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory, chyba że napisano inaczej. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy $\mathbb{R}$. $\mathbb{N}_0$ tj. zbiór liczb naturalnych z zerem.

3.1 Pojęcia wstępne

1.(1pkt) Znaleźć dopełnienia zbiorów A w przestrzeni X, gdy:
a)

$$A = \{2n \in A : n = \mathbb{N}_0\}; X = \mathbb{R}$$

b)

$$B = \{\emptyset\}; X = \mathbb{C}$$

[3]

2.(1pkt.)Co to za zbiór?: a)

$$C = \cup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 2]$$

b)

$$D = \cap_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 2]$$

3.(1 pkt.) Wyjaśnić zasadę działania dowodu ad absurdum.
4. (1pkt) Czy twierdzenia, że:
a) Człowiek jest piratem, wtedy i tylko wtedy kiedy nosi brodę. Istnieje pirat bez brody.
b) Jeśli człowiek jest piratem to nosi brodę. Istnieje pirat bez brody.
Są ze sobą sprzeczne?

3.2 Zbieżność ciągów

Przypomnienie (Więcej o tym w materiałach edukacyjnych)
Ciąg oznaczamy (a_n) a n-ty element tego ciągu oznaczamy a_n. Ciąg (a_n) nazywamy zbieżnym do granicy g, jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N \; |a_n - g| < \epsilon$$

Jeśli (a_n) jest zbieżny mówimy wtedy też, że prawie wszystkie wyrazy (a_n) zawierają się w przedziale $|g - \epsilon, g + \epsilon|$,czyli poza tym przedziałem jest **skończona** ilość wyrazów ciągu (a_n) (Prawie wszystkie oznacza tu wszystkie poza skończoną ilością)
5. (1 pkt.) Podać przykład ciągu nie zbieżnego, i udowodnij że twój przykład jest nie zbieżny. (Wsk. możesz wykorzystać wnioski z innych zadań o ile je udowodniłeś.)
6.(1pkt.) Wyliczyć w z definicji granicę ciągu $a_n = \frac{1}{n}$

7. (1pkt.) Co by się stało jeżeli definicje zbieżności ciągu byśmy zmienili na

$$\forall \epsilon \geq 0 \; \exists N : \forall n > N \; |a_n - g| \leq \epsilon$$

tj. jakie ciągi byłyby zbieżne?

8(1pkt.) Zbadać zbieżność ciągu $a_n = \sin(\pi n)$. Wsk. Zadanie 10.

[3]Zbiór Zbiór $\mathbb{C}$ nazywamy zbiorem liczb zespolonych

9.(2pkt) Pokazać że każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchiego.[4] Pojęcie ciągu Cauchiego wyszukaj samodzielnie tj. część zadania.

10.(2pkt.) Pokazać, że jeśli ciąg jest zbieżny to istnieje dokładnie jedna granica. Wsk. Wykorzystać metodę dowodzenia ad absurdum.
Przypomnienie
Ciąg nazywamy ograniczony z góry jeżeli

$$\exists M: \ \forall n \ a_n \leq M$$

Ciąg nazywamy ograniczony z dołu jeżeli

$$\exists M: \ \forall n \ a_n \geq M$$

Ciąg nazwamy ograniczony kiedy

$$\exists M: \ \forall n \ |a_n| \leq M$$

, czyli jest ograniczony z dołu albo ograniczony z góry.
11.(2pkt.)Pokazać, że jeśli ten ciąg jest zbieżny to jest ograniczony.

3.3 Pojęcie granicy funkcji

12 (1pkt) Kiedy funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ posiada granicę równą wartości funkcji w tym punkcie (Obustroną i jednostronną) Odpowiedz Uzasadnij.
Inaczej kiedy te zdania zachodzą:
a)

$$x_0, x \in \mathbb{R} \lim_{x_0 \to x^+} f(x_0) = f(x)$$

b)

$$x_0, x \in \mathbb{R} \lim_{x_0 \to x^-} f(x_0) = f(x)$$

c)

$$x_0, x \in \mathbb{R} \lim_{x_0 \to x} f(x_0) = f(x)$$

Jak sądzisz jaki ma to związek z ciągłością tej funkcji?

[4] Twierdzenie w drugą stronę jest także prawdziwie, jednak nie wymagam jego dowodu.