Problemy do rozwiazania

Jacek Kurek

Czerwiec 2017

1 Wprowadzenie

1. Zadania wysyłamy na adres jacek.kurek21@gmail.com, temat w formacie "IMIE NAZWISKO - WARSZTATYWWW".
2. Jeśli wyślesz zadanie w TEXu to poprawisz mi humor i ułatwisz prace, inne formy również uznaje. Po otrzymaniu zadań wysyłam maila zwrotnego z informacja że jestem w stanie doczytać sie i zrozumieć treść, lub że należy wysłać czytelniejsza wersje.
3. Do zapoznania sie z tematem polecam podrecznik Heleny Rasiowej "Wstep do matematyki współczesnej", jak również dostepne online wykłady na wazniaku "Logika i teoria mnogości". Wszelkie pytania o pomoc czy podrzucenie innych materiałów można śmiało kierować na moja skrzynke mailowa.
4. Nawet jeśli rozwiazania do cześci z tych zadań znalazłeś w internecie, postaraj sie ujać je swoimi słowami - bedzie to oznaczać, że zrozumiałeś rozwiazanie, a to jest główny cel tego arkusza.
5. Z zadań oznaczonych gwiazdka można wybrać do zrobienia połowe w każdej z sekcji.

2 Rachunek zdań

1. Sprawdź czy podane zdania sa tautologiami:
   (a) $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   (b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
2. Za pomoca spójnika $\oplus$ zdefiniowanego nastepujaco $(a \oplus b) \equiv \neg(a \wedge b)$ zdefiniuj alternatywe, koniunkcje i negacje.
3. * Pokaż że za pomoca alternatywy i koniunkcji nie da sie zdefiniować implikacji.

4. * Wykaż że formuła zbudowana tylko i wyłacznie z operatora $\Leftrightarrow$ jest tautologia wtedy i tylko wtedy gdy każda zmienna zdaniowa wystepuje w niej parzyście wiele razy.

3 Indukcja matematyczna i szufladki

1. (klasyk) Udowodnimy teraz że wszystkie koty sa tego samego koloru. Baza indukcji jest oczywiście zbiór złożony z jednego kota - teza jest spełniona. Krok indukcyjny przebiega nastepujaco: weźmy n-1 kotów, wiemy o nich że sa tego samego koloru. Teraz dołóżmy tam n-tego kota, wyjmijmy zaś innego. Mamy znowu n-1 kotów o których wiemy że sa tego samego koloru, oraz jednego z boku - również tego samego koloru co reszta, Q.E.D.

   Znajdź bład w rozumowaniu.

2. Ile łamań (wzdłuż lini podziału tabliczki) jest potrzebnych do rozdzielenia tabliczki czekolady $n \times m$ na pojedyńcze kawałki?

3. * Wybierzmy $n + 1$ liczb spośród $1, 2, \ldots, 2n$ - udowodnij że niezaleznie od wyboru znajda sie dwie liczby takie że jedna dzieli druga.

4. * Na ile obszarów dzieli płaszczyzne k prostych z których żadne trzy nie przecinaja sie w jednym punkcie i żadne dwie nie sa równoległe? Uogólnij twoje rozumowanie dla przecinajacych sie płaszczyzn w przestrzeni (żadne cztery nie tna sie w jednym punkcie, żadne trzy nie tna sie na jednej prostej, żadne dwie nie sa równoległe) (DODATKOWE) przeprowadź podobne wnioskowanie dla przypadku n-wymiarowego.

4 Teoria mnogości

1. Niech R bedzie rodzina relacji równoważności na zbiorze X. Pokaż że $\bigcap R$ jest relacja równoważności na zbiorze X. Dlaczego $\bigcup R$ niekoniecznie jest relacja równoważności? Wskaż przykład oraz ceche która charakteryzuje relacje równoważności i nie zostaje zachowana przy ich sumowaniu.

2. Udowodnij że dla każdej relacji $R \subset X \times X$ istnieje najmniejsza w sensie inkluzji relacja przechodnia S, taka że $R \subset S$.

3. Sprawdź czy podane relacje sa relacjami równoważności

   (a) $r \equiv m \Leftrightarrow r - m \in \mathbb{Q}$ dla $r, m \in R$

   (b) $r \equiv m \Leftrightarrow r$ i m różnia sie na skończenie wielu pozycjach w rozwinieciu dziesietnym.

   (c) $r, k \in P(X), X$ jest skończony $r \equiv k \Leftrightarrow (r \cup k) - (r \cap k)$ ma parzyście wiele elementów.

4. Wykaż poniższe równoliczności.

(a) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

5. * Dana jest rodzina n elementowa $K_n \subset P(X)$. Udowodnij że za pomoca operacji dopełnienia, sumy skończonej oraz skończonego przeciecia, można uzyskać co najwyżej 2^{2^n} różnych zbiorów. Notka - przez $P(X)$ oznaczamy zbiór potegowy X

6. * Niech K bedzie zbiorem o nastepujacych własnościach. $\emptyset \in K$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K \Rightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in K$. Czy K może być równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych?

7. * Pewien zbiór $X \subset P(\mathbb{N})$ ma te własność że $\forall_{x,y \in X} x \subset y \vee y \subset x$ czy zbiór ten może być równoliczny z liczbami rzeczywistymi?

8. * Pewien zbiór $X \subset P(\mathbb{N})$ ma te własność, że $\forall_{x,y \in X} x \subset y \Rightarrow x = y$ Czy zbiór ten może być równoliczny z liczbami rzeczywistymi?