

Rachunek Lambda, Typy i Logika Intuicjonistyczna - zadania

Radosław Rowicki

11 marca 2020

Informacje wstępne:

1. Zadania wysyłamy na adres radrowicki@gmail.com. Chciałbym, żeby w temacie wiadomości było w formacie "[WWW] <imię> <nazwisko>".
2. Wszystkie zadania typu "napisz funkcję" można zaprogramować w dowolnym języku programowania (ale w takim, w którym w ogóle występują funkcje lub metody...), pseudokodzie lub w czystej matematyce **bez używania jakichkolwiek zmieniających się zmiennych, pętli i tym bardziej instrukcji goto**. Można natomiast dowoli korzystać z rekurencji i stałych.
3. Nie trzeba zrobić wszystkich zadań, ale warto przynajmniej spróbować. Mogę pozytywnie ocenić nawet nieudaną próbę.
4. Nie korzystamy z chamskich gotowców (jak jest polecenie 'napisz funkcję która mnoży' oczywiste jest, że nie korzystamy z mnożenia ani dzielenia).
5. Przy rozwiązaniach w prawdziwych językach programowania liczba rzeczywista może być interpretowana jako dowolny typ zmiennoprzecinkowy. Nie zważamy na precyzję floata, chyba że treść stanowi inaczej.
6. Polecam niektóre punkty opisać matematycznie lub pseudokodem, gdyż wiele typowych języków programowania nie dopuszcza przyjmowania funkcji jako argumentu. Jednakże nie mam nic przeciwko rozwiązaniom typu opakowanie funkcji w klasę, użycie wskaźników na funkcje, lambdy z Java8/C++11 itp. Jeśli jednak chcesz mieć możliwość fizycznego przetestowania swojej implementacji, to z powszechnie znanych języków powinien nadać się JavaScript.
7. W razie jakichkolwiek wątpliwości - pisz. Jednakże zaznaczam, że nie odpowiadamy na pytania ontologiczne, natury egzystencjalnej ani religijne.

Zad 1. Funkcje

Napisz funkcję która:

1. Przyjmie liczbę naturalną n i zwróci liczbę naturalną, która zaokrągliła w dół \sqrt{n} . (3 pkt)
2. Przyjmie funkcję $f \in (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ i zwróci funkcję o takiej samej dziedzinie i przeciwdziedzinie, której wykres otrzymuje się przez przesunięcie wykresu funkcji f w lewo o 1 i dwukrotnym spłaszczeniu (powinowactwo prostokątne) w pionie. (2 pkt)
3. Przyjmie wartość rzeczywistą ϵ i zwróci funkcję, która przyjmuje funkcję i zwraca funkcję, która jest jej ilorzazem różnicowym (pochodną) przy zadanym ϵ . (3 pkt)

Zad 2. Programowanie

Napisz w dowolnym języku programowania funkcję/klauzulę/procedurę/rutynę która:

1. W zależności od argumentu/parametru n policzy n najmniejszych liczb pierwszych. Może wypisać, może wrzucić je do listy, tablicy, bez znaczenia. (4/2 pkt)
2. Konwertuje wyrażenie arytmetyczne z liczbami (mogą być jednocyfrowe), dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i nawiasami z notacji infiksowej do notacji postfiksowej (np $1+2-3*(4+5)$ zmieni w $12+345+*-).$ Nie trzeba się zajmować sprawdzaniem poprawności wejścia i parsowaniem białych znaków. (8/4 pkt)

Pierwsza liczba oznacza liczbę punktów otrzymanych za napisanie rozwiązania w dowolnym spośród języków: Haskell, dowolny dialekt ML (w tym OCaml), Agda, Idris, dowolny dialekt Lispa, Prolog, Datalog, czysty rachunek lambda, Erlang, Elixir, Radlang, Coq, system szablonów z C++.

To zadanie nie zakłada że znasz jakichkolwiek język programowania, w szczególności któryś z wymienionych. Ma ono przede wszystkim zmotywować do podjęcia próby ogarnięcia podstaw programowania z nastawieniem na języki funkcyjne.

Zad 3. Teoria zbiorów

Pokaż, że pary zbiorów

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ oraz $(A \times B) \rightarrow C$
2. $(A \times B) \rightarrow C$ oraz $(A \rightarrow C) \times (B \rightarrow C)$

mają zawsze tyle samo elementów (tzn. istnieje *bijekcja* między nimi). po (3 pkt)

Za rozwiązanie tego zadania przez konstrukcję bijekcji lub skorzystanie z twierdzenia Cantora-Bernsteina-Schrödera dodatkowo po (1 pkt)

Zad 4. Logika i semantyka

Oceń prawdziwość zdań (z uzasadnieniem):

1. Brukselka jest smaczna (0 pkt)
2. Zdanie $(a \implies (b \implies c)) \iff ((a \wedge b) \implies c)$ (wygląda znajomo...) jest tautologią w logice klasycznej (2 pkt)
3. Zdanie $((a \wedge b) \implies c) \iff ((a \implies c) \wedge (b \implies c))$ (to też...) jest tautologią w logice klasycznej (2 pkt)
4. Zdanie $\neg(((p \implies r) \wedge (q \implies s) \wedge (\neg p \vee \neg s)) \implies (\neg p \vee \neg q))$ jest spełnialne w logice klasycznej (2 pkt)
5. (ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp) wtedy i tylko wtedy gdy (jeśli (nieprawda że (Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką)) to (((pustynia Atakama jest w Ameryce) oraz (nieprawda że (((jeśli (jihad oznacza w Islamie świętą wojnę) to ((jeśli (jeśli (Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką) to (Archimedes wynalazł koło)) to ((każda funkcja różniczkowalna jest ciągła) oraz (pustynia Atakama jest w Ameryce)))) oraz (nieprawda że (((pustynia Atakama jest w Ameryce) wtedy i tylko wtedy gdy (Ardbeg jest znany z destylacji whisky typu single malt)) wtedy i tylko wtedy gdy (nieprawda że ((Lisp jest starszy od C++) wtedy i tylko wtedy gdy (pustynia Atakama jest w Ameryce)))))) wtedy i tylko wtedy gdy (jeśli (nieprawda że (((w Heroes III można rekrutować Nagi w Fortecy) oraz (Prolog jest językiem deklaratywnym)) lub (jeśli (szczepionki wywołują autyzm) to (Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką))) wtedy i tylko wtedy gdy ((nieprawda że ((pory roku są spowodowane zmieniającą się odległością Ziemi od Słońca) oraz (autor zadania jest gejem))) lub (nieprawda że ((druga wojna światowa rozpoczęła się w 1939) wtedy i tylko wtedy gdy (Wiedźmin 3 jest produkcją studia EA)))))) to (jeśli (homeopatia to potwierdzona naukowo metoda leczenia) to (jeśli ((hipoteza Riemanna jest prawdziwa) oraz (klasa problemów P jest równa klasie NP)) to $(2 + 5 = 5)$)) wtedy i tylko wtedy gdy (mysikrólik to ssak))) wtedy i tylko wtedy gdy (((nieprawda że (((nieprawda że (jeśli (jeśli (nieprawda że (Lisp jest starszy od C++)) to ((Archimedes wynalazł koło) oraz (Lisp jest starszy od C++))) to (nieprawda że (((ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp) oraz (Archimedes wynalazł koło)) lub (jeśli (autor zadania jest gejem) to (w Heroes III można rekrutować Nagi w Fortecy)))))) wtedy i tylko wtedy gdy ((jeśli ((druga wojna światowa rozpoczęła się w 1939) wtedy i tylko wtedy gdy (program użyty do stworzenia tego zadania terminuje na każdym wejściu)) to (jeśli (jihad oznacza w Islamie świętą wojnę) to (Pitagoras był wielkim filozofem))) wtedy i tylko wtedy gdy ((nieprawda że ((Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką) lub (Archimedes wynalazł koło))) lub ((ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp) wtedy i tylko wtedy gdy (nikt nigdy nie napisał zdania z potrójnym przeczeniem)))) oraz ((nieprawda że (jeśli $(2 + 2 = 4)$ to (jeśli ((Pitagoras był wielkim filozofem) wtedy i tylko wtedy gdy (Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką)) to ((Prolog jest językiem deklaratywnym) wtedy i tylko wtedy gdy (żaden problem milenijny nie został jeszcze rozwiązany)))))) wtedy i tylko wtedy gdy (nieprawda że ((nieprawda że (jeśli ((druga wojna światowa rozpoczęła się w 1939) oraz (każda funkcja

różniczkowalna jest ciągła)) to ((nikt nigdy nie napisał zdania z potrójnym przeczeniem) lub (pory roku są spowodowane zmieniającą się odległością Ziemi od Słońca)))) lub (nieprawda że (((pory roku są spowodowane zmieniającą się odległością Ziemi od Słońca) oraz (Bóg istnieje)) oraz (nieprawda że (jeśli (każda bijekcja jest iniekcją i surjekcją) to (Bóg istnieje))))))))) wtedy i tylko wtedy gdy (((druga wojna światowa rozpoczęła się w 1939) oraz (((Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką) oraz (nieprawda że ((żaden problem milenijny nie został jeszcze rozwiązany) lub (Archimedes wynalazł koło)))))) wtedy i tylko wtedy gdy (((Prolog jest językiem deklaratywnym) lub (żaden problem milenijny nie został jeszcze rozwiązany)) wtedy i tylko wtedy gdy ((Pitagoras był wielkim filozofem) oraz (w Heroes III można rekrutować Nagi w Fortecy)))))) wtedy i tylko wtedy gdy (jeśli (homeopatia to potwierdzona naukowo metoda leczenia) to (jeśli (((Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką) wtedy i tylko wtedy gdy ($2 + 2 = 4$) oraz (nieprawda że ((Ardbeg jest znany z destylacji whisky typu single malt) oraz (w Heroes III można rekrutować Nagi w Fortecy)))))) to (nieprawda że (((ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp) wtedy i tylko wtedy gdy (ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp)) oraz (nieprawda że (żaden problem milenijny nie został jeszcze rozwiązany))))))))) wtedy i tylko wtedy gdy (nieprawda że (jeśli (nieprawda że (((nieprawda że (jeśli ((Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką) wtedy i tylko wtedy gdy (każda funkcja różniczkowalna jest ciągła)) to (nikt nigdy nie napisał zdania z potrójnym przeczeniem))) oraz (nieprawda że ((jeśli (homeopatia to potwierdzona naukowo metoda leczenia) to (druga wojna światowa rozpoczęła się w 1939)) wtedy i tylko wtedy gdy ((homeopatia to potwierdzona naukowo metoda leczenia) oraz ($2 + 5 = 5$)))))) lub (jeśli (nieprawda że (((druga wojna światowa rozpoczęła się w 1939) wtedy i tylko wtedy gdy (pustynia Atakama jest w Ameryce)) oraz ((program użyty do stworzenia tego zadania terminuje na każdym wejściu) wtedy i tylko wtedy gdy (jihad oznacza w Islamie świętą wojnę)))))) to (ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp))) oraz (((nieprawda że ((żaden problem milenijny nie został jeszcze rozwiązany) lub (nieprawda że ((pustynia Atakama jest w Ameryce) wtedy i tylko wtedy gdy (ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp)))))) wtedy i tylko wtedy gdy (Małgosia z filmu Kraina Grzybów jest wiewiórką)) oraz ((nieprawda że (jeśli (nieprawda że ((szczepionki wywołują autyzm) oraz (każda bijekcja jest iniekcją i surjekcją))) to ((Wiedźmin 3 jest produkcją studia EA) lub (żaden problem milenijny nie został jeszcze rozwiązany)))))) lub ((jeśli (w Księdze Rodzaju zakazany owocem jest jabłko) to (pustynia Atakama jest w Ameryce)) wtedy i tylko wtedy gdy ((ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp) lub (gdzieś w kosmosie istnieje latający jednorozec)))))) to (((jeśli (nieprawda że (jeśli ((druga wojna światowa rozpoczęła się w 1939) lub (Ziemia jest płaska)) to ((Prolog jest językiem deklaratywnym) wtedy i tylko wtedy gdy (Ziemia jest płaska)))))) to (jeśli (jeśli (Lisp jest starszy od C++) to (Ardbeg jest znany z destylacji whisky typu single malt)) to (nieprawda że (jeśli (Bóg istnieje) to (ludzie nie pochodzą od żadnego z aktualnie żyjącego gatunku małp)))))) lub ((jihad oznacza w Islamie świętą wojnę) lub (Archimedes wynalazł koło))) oraz (Prolog jest językiem deklaratywnym))))))

(6 pkt – koniecznie opisz sposób osiągnięcia rozwiązania)