Wymiar liniowy

piotr@oszer.pl (ver 1.3 01:00 23.05.2019)

(wszelkie błędy oraz nieścisłości proszę zgłaszać bezzwłocznie)

Zadania są dość zróżnicowanej trudności, zrobienie zadania 0 (nie trzeba się tego uczyć na pamięć, tylko się oswoić) oraz pierwszych trzech podpunktów zadania 1. jest konieczne, aby się zakwalifikować, wszelkie pytania jak i rozwiązania jak proszę wysyłać na po394403@students.mimuw.edu.pl (ten jest częściej sprawdzany) lub na mail podany powyżej.

Rachunek różniczkowy:

0 (bez punktów):

Poznaj podstawowe reguły różniczkowania (z oczywistych względów „rozwiązań" tego zadania nie należy wysyłać, ale oczywiście można zadawać pytania na ten temat) :

a) pochodne wielomianów
b) pochodną funkcji wykładniczej
c) pochodną $x^{\wedge k}$, gdzie k jest liczbą rzeczywistą
d) pochodną logarytmu, sinusa, cosinusa oraz tangensa
e) pochodną sumy i różnicy funkcji
f) pochodną złożenia funkcji
g) pochodną iloczynu funkcji
h) pochodną funkcji odwrotnej (jeśli funkcja jest bijekcją)
i) pochodną odwrotności funkcji (tam gdzie funkcja nie jest 0)

Zadanie 1 (15 pkt):

Napisz własnymi słowami (najważniejsze jest zrozumienie)
dla funkcji f: R->R:

a) co to jest granica ciągu liczb?
b) co to znaczy że funkcja jest ciągła?
c) co to jest pochodna i jaki ma związek z styczną do wykresu?
d) czym różni się różniczkowalność funkcji, od bycia klasy C^1 (co oznacza że pierwsza pochodna jest ciągła) , pokaż przykład funkcji różniczkowalnej ale nie C^1
e) podaj przykład funkcji gładkiej (innej niż wielomian) czyli klasy C^∞ czyli takiej że dowolnie dużo razy różniczkując otrzymujemy funkcje różniczkowalną

Zadanie 2 (15 pkt):

a) udowodnij że każda funkcja ciągła ma własność wartości pośredniej:(dla każdego wyboru a,b) jeśli f(a)=x oraz f(b)=y, to na odcinku [a,b] funkcja osiąga wszystkie wartości między x i y (*czy każda funkcja spełniająca taką własność jest ciągła?)

b) dla każdej liczby naturalnej k, podaj przykład funkcji klasy C^k (czyli pierwsze k pochodnych jest ciągłych) ale już nie C^{k+1} (czyli k+1 pochodna nie jest ciągła lub nie istnieje)

c) czy z tego że pochodna funkcji w pewnym punkcie jest dodatnia wynika, że ta funkcja odpowiednio blisko tego punktu, rosnąca? Uzasadnij odpowiedź.