Zadania kwalifikacyjne

1 Wstęp

Zadania proszę wysyłać na adres mieszko1037@gmail.com z tematem "[Teoria miary] Imię i nazwisko" do 17 maja. Forma jest zupełnie dowolna, byleby czytelna. Zachęcam do wysyłania zadań wcześniej, ponieważ wtedy wyślę odpowiedź z moimi uwagami i podpowiedziami. Nie trzeba robić wszystkich zadań. Warto wysyłać nawet częściowe rozwiązania, ponieważ będę je brał pod uwagę przy ocenianiu. W razie jakichkolwiek wątpliwości, problemów itd. - też piszcie.

2 Analiza

0. Znajdź w dowolym źródle definicje granicy ciągu oraz sumy szeregu.

1. Udowodnij bezpośrednio z definicji granicy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

2. Udowodnij bezpośrednio z definicji sumy szeregu, że $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, gdy $|q| < 1$.

3. W dawnych matematycznych czasach (XVII - XVIII wiek) nie istniała jeszcze ścisła terminologia i aksjomatyka. Wieloma pojęciami posługiwano się wyłącznie "intuicyjnie", co prowadziło do wielu paradoksów. Oto przykład zagadnienia, które w tych czasach było prawdziwym, poważnym problemem matematycznym. Rozważmy sumę nieskończoną $s = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Z jednej strony mamy

$$s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$$

z drugiej strony

$$s = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + ... = 1 + 0 + 0 + 0 + ... = 1$$

z trzeciej strony

$$1 - s = 1 - (1 - 1 + 1 - ...) = 1 - 1 + 1 - ... = s \text{ skąd } s = \frac{1}{2}$$

Wytłumacz źródło owego paradoksu i wyjaśnij, czemu we współczesnej matematyce już on nie występuje.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem. **Ograniczeniem górnym** zbioru A nazywamy dowolną liczbę $x \in \mathbb{R}$ która jest niemniejsza od każdego elementu A. Za ograniczenie górne dowolnego zbioru przyjmujemy także ∞. Najmniejsze ograniczenie górne zbioru A nazywamy jego **kresem górnym** lub **supremum** i oznaczamy $\sup A$. Analogicznie definiujemy ograniczenie dolne oraz kres dolny lub infimum jako największe ograniczenie dolne. Przyjmujemy przy tym, że $\sup \emptyset = -\infty$ oraz $\inf \emptyset = \infty$. Supremum i infimum zawsze istnieją, ale nie będę tego dowodził (często przyjmuje się to za aksjomat zbioru liczb rzeczywistych).

4. Wyznacz kresy następujących zbiorów:
a)
$$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$$
b)
$$\{\frac{11}{k} - \frac{3}{m} : k, m \in \mathbb{N}_+\}$$
gdzie $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb naturalnych dodatnich.

3 Teoria mnogości

Jest jasne, że jeżeli chcemy mówić o mierzeniu rzeczy, to musimy nauczyć się w jakiś sposób mówić o zbiorach nieskończonych. Każda sensowna figura lub bryła jest przecież nieskończonym zbiorem punktów. Narzędzi do tego celu dostarcza nam dziedzina matematyki nazywana teorią mnogości. Nam będzie potrzebne tylko jedno z tych narzędzi, a mianowicie pojęcie zbiorów przeliczalnych.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy **iniekcją**, jeżeli jest różnowartościowa.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy **suriekcją**, jeżeli każdy element B jest obrazem pewnego elementu A.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy **bijekcją**, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.
Intuicyjnie bijekcja jest więc połączeniem w pary elementów dwóch zbiorów. Dwa zbiory A i B nazywamy **równolicznymi**, jeżeli istnieje bijekcja $f : A \to B$. Zbiór nazywamy **przeliczalnym**, jeżeli jest równoliczny z pewnym pozdzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych. Jak łatwo zauważyć zbiór przeliczalny jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$.

0. Przeczytaj następujące trzy artykuły:
`http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2018/12/28/Hotel_Hilberta/`
`http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2019/04/29/Jak_policzyc_nieskonczone/`
`http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2019/05/26/Nie_kazda_jest_taka_sama_/`

1. Które z poniższych zbiorów są przeliczalne? Odpowiedź uzasadnij.
a) zbiór wielomianów w współczynnikach całkowitych
b) zbiór liczb niewymiernych
c) zbiór ciągów (x_n) liczb rzeczywistych takich, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
d) zbiór ciągów (x_n) liczb całkowitych takich, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2. Udowodnij, że suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

4 Zadania z gwiadką

Na koniec kilka zadań "z gwiazdką", które są już bardzo bezpośrednio związane z tym, czym będziemy się zajmować na zajęciach. Na pewno nie będą one koniecznie do kwalifikacji, ale gorąco zachęcam do zapoznania się z nimi.

1. Udowodnij, że okrąg bez punktu można podzielić na dwie rozłączne części, z których, za pomocą samych obrotów, można złożyć cały okrąg.

2. Niech U będzie przeliczalną rodziną przedziałów zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, taką, że każda liczba wymierna znajduje się w pewnym przedziale należącym do U. Niech Ω będzie zbiorem wszystkim takich rodzin. Oczywiście Ω jest niepusta, bo na przykład $\{\mathbb{R}\} \in \Omega, \{(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)\} \in \Omega$. Wyznaczyć wartość

$$\inf\{\sum_{I\in U} |I| : U \in \Omega\}$$

gdzie $|I|$ oznacza długość przedziału I.