Zadania kwalifikacyjne

Mateusz Turowski

March 2020

0 Wstęp

Rozwiązania proszę przesyłać na adres mail: maturowsk@gmail.com.

Jeśli ktoś nie zna jakiegoś pojęcia to do rozwiązania zadań powinny wystarczyć informacje znalezione w pierwszym lepszym linku w internecie na jego temat (np. na wikipedii). Jeśli ktoś jednak chciałby się bardziej zagłębić lub chciał, żeby mu polecić jakieś źródło to mogę wtedy coś poszukać konkretnego. W razie jakiś pytań lub wątpliwości można pisać maila do mnie.

Żeby zaliczyć na pewno trzeba wysłać przynajmniej jedno zadanie z każdego działu. Jeśli chodzi o próg to jak ktoś będzie miał powyżej lub równo 80% nie ma się czym martwić, a jeśli mniej to będę patrzył jak będzie szło ogólnie rozwiązywanie i w razie czego będę potrzeby będę obniżał próg. (ciężko mi jest ocenić poziom być może za dużo wymagam, nie wiem)

Punkty z zadań dodatkowych są doliczane do wyniku, ale nie wliczają się do maksymalnej liczby punktów do zdobycia. To znaczy, że nie trzeba zrobić ani jednego zadania dodatkowego, żeby się zakwalifikować, ale próbując można bardzo łatwo zarobić parę bonusowych punktów. Zadania dodatkowe jak sama nazwa wskazuje są dodatkowe i mogą wymagać użycia wiedzy wykraczającej poza wymagania do warsztatów. Jeśli ktoś jednak chciałby je bardzo zrobić a nie wiedział jak to można pisać o pomoc.

Zadania mają na celu sprawdzenie rozumienia poszczególnych pojęć, więc uzasadnienia są ważną częścią rozwiązania, więc jakieś przynajmniej szczątkowe rachunki przejściowe lub zdanie uzasadnienia dlaczego tak są obowiązkowe.

1 Pochodne (8 pkt)

Przy rozwiązywaniu dwóch pierwszych zadań można śmiało korzystać z podstawowych wzorów na pochodne natomiast w zad 3 należy posłużyć się bardziej elementarnymi pojęciami takimi jak granice.

1. (3 pkt) Policz pierwsze pochodne poniższych funkcji po x:
   (a) $f(x) = x^3 \sin(x)$
   (b) $f(x) = e^{2ix} + 10$

(c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

2. (5 pkt) Policz drugie pochodne poniższych funkcji po y.

   (a) $f(y) = \frac{25x^2\sqrt{e^{x^2}}}{\sin(x^3)\cos^2(x)}$
   (b) $f(y) = 3x\cos(y^3) + 2x$
   (c) $f(y) = y^2 e^{iy}$

3. (3 pkt)(dodatkowe) Udowodnij poprawność poniższego wzoru

$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{1}$$

2 Całki (15 pkt)

1. (6 pkt) Policz poniższe całki nieoznaczone.

   (a) $\int(x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})dx$
   (b) $\int dx(x\sin(3x^2) + e^5)$
   (c) $\int \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx$

2. (9 pkt) Policz poniższe całki oznaczone.

   (a) $\int_2^5 dy \int_1^e \frac{\sqrt{y}}{3x}dx$
   (b) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx$
   (c) $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)$

3. (12 pkt) (dodatkowe) Policz całki i udowodnij, że wyniki są poprawne.

   (a) $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x^2}}dx$
   (b) (trudne)$\int_{-\infty}^{+\infty} 3e^{-2x^2}dx$

3 Równania różniczkowe (10 pkt)

1. (4 pkt) Znajdź jawną postać x(t) wynikającą z poniższych równań.

   (a) $\frac{dx}{dt} = 2x + 5$
   (b) $\frac{dx}{dt} = \frac{3t}{2x}$

2. (6 pkt) Znajdź zależność $y(t)$ przy założeniu, że $y(0) = 0$ oraz $y'(0) = 2$.

   (a) $y''(x) = -4\sin(x)$
   (b) $y''(x) = -\omega y(x)$

3. (6 pkt) (dodatkowe) Znajdź jawne postacie x(t) oraz y(t) spełniające układ równań

$$\begin{cases} y'(t) = 4y(t) + x(t) \\ x'(t) = 4x(t) - y(t) \end{cases}$$

4 Macierze (12 pkt)

1. (2 pkt) Wykonaj poniższe działania na macierzach

   (a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} -1 & 99 & 8 \\ 8 & 98 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. (3 pkt) Policz wyznacznik macierzy.

   (a) $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2i \\ 8 & 1 & -2 \\ 10 & -i & 3 \end{bmatrix}$

3. (2 pkt) Oblicz poniższy iloczyn wektorowy i skalarny.

   (a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

4. (5 pkt) Znaleźć wyznacznik macierzy Jacobiego (jakobian) dla transformacji z walcowego do kartezjańskiego układu współrzędnych.

5. (6 pkt) (dodatkowe) Oblicz e^A, gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5 Trójkąty (11 pkt)

Niech $\vec{E}(x,y,z) := (2x+13y^2+3)\hat{e}_x+(2y+xz)\hat{e}_y+(1-x^3+6z^2)\hat{e}_z$, gdzie $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ są to wersory, czyli wektory o długości jednostkowej skierowane odpowiednio w kierunkach x,y i z osi kartezjańskiego układu współrzędnych. Można przedstawić wersory w postaci macierzowej jako $\hat{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
E_i oznacza i-tą składową wektora $\vec{E}$ to znaczy, że $E_i := \vec{E} \cdot \hat{e}_i$.

1. (11 pkt) Oblicz.

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

(b) ∇E_y

(c) ΔE_z

(d) $\vec{\nabla} \times \vec{E}$

(e) $(\nabla E_x)(1, 2, 3) \times \vec{E}(2, -1, 3)$

2. (5 pkt) (dodatkowe) Zapisz funkcję wektorową $\vec{E}(x, y, z)$ w sferycznym układzie współrzędnych otrzymując $\vec{E}(r, \phi, \theta)$, a następnie policz dywergencję otrzymanej funkcji. Przejdź z powrotem do układu kartezjańskiego. Czy otrzymałeś taki sam wynik jak w podpunkcie (a) poprzedniego zadania? Napisz dlaczego wyniki muszą być identyczne lub dlaczego się różnią.