1 Homotopijna równoważność

Po policzeniu dwóch przykładów koncepcja homotopijnej równoważności staje się naturalna. Definicji i wskazówek można szukać w internecie lub literaturze. (Proszę tylko zaznaczyć źródła, z których się korzystało – to dobry naukowy nawyk).

Zadanie 1. (5 punktów)

a) Pokaż, że przestrzeń Euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest homotopijnie równoważna z punktem. **(4 punkty)**

b) Dlaczego dla $n > 0$ *nie jest* do niego homeomorficzna? **(1 punkt)**

Zadanie 2. (5 punktów)

a) Pokaż, że przestrzeń Euklidesowa bez punktu $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ jest homotopijnie równoważna ze sferą S^n. **(4 punkty)**

b) Dlaczego *nie są* homeomorficzne? **(1 punkt)**

Dlaczego akurat powyższe przykłady? Jeśli dwie przestrzenie nie są homotopijnie równoważne, to na pewno nie będą też homeomorficzne. Okaże się, że homologia („dziury w przestrzeni") nie rozróżnia przestrzeni homotopijnie równoważnych, ale wyśmienicie sobie radzi z odróżnieniem sfery od torusa.

2 Algebra liniowa

Przez 0 będziemy oznaczać zerowymiarową przestrzeń wektorową. Innymi słowy

$$0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$$

Ponadto przez $W \leqslant V$ będziemy oznaczać fakt, że W jest podprzestrzenią wektorową V.

Zadanie 3. (5 punktów) Niech $V = \mathbb{R}^3$ oraz

$$W = \{(x, y, z) \in V \mid x + y = 0\} \leqslant V$$

a) Znajdź bazę przestrzeni ilorazowej V/W i jej wymiar. **(2 punkty)**

b) Rozstrzygnij czy $(1, 2, 1) + W = (-1, 4, 8) + W$. (Obydwie strony równości żyją w przestrzeni V/W). **(3 punkty)**

Zadanie 4. (30 punktów) *To zadanie wymaga najwięcej pracy, będącej prostymi obliczeniami. Nie lubię zadawać zadań tego rodzaju, ale są ważne. Proszę, zrób je. (Zauważ, że dałem takie tylko jedno).*

Rozważ ciąg odwzorowań przestrzeni wektorowych:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Oblicz macierze BA, CB. **(4 punkty)**

b) Pokaż, że $\operatorname{im} A \leqslant \ker B$ oraz $\operatorname{im} B \leqslant \ker C$. (Trudne? Spójrz punkt wyżej). **(1 punkt)**

c) Znajdź wymiary i przykładowe bazy następujących przestrzeni:

$$\ker A, \;\; \ker B / \operatorname{im} A, \;\; \ker C / \operatorname{im} B, \;\; \mathbb{R}^2 / \operatorname{im} C$$

(25 punktów)

3 Powiew homologii singularnej

Zadanie 5. (15 punktów)

To zadanie ma długą treść, ale po odszyfrowaniu definicji staje się bardzo proste. Po prostu cierpliwość warto nagrodzić wieloma punktami.

Mamy zbiór $k+1$ symboli $S_0 = \{[e_i] \mid 0 \leqslant i \leqslant k\}$ nazywanych *zerowymiarowymi sympleksami*. Traktujemy je jako wektory bazowe przestrzeni $V_0 = \mathbb{R}^{k+1}$, innymi słowy wolno nam pisać wyrażenia postaci

$$3[e_0] + \sqrt{2}[e_1] - 5[e_2]$$

dodawać je i mnożyć przez liczby rzeczywiste.

Następnie wprowadzamy zbiór *jednowymiarowych sympleksów* $S_1 = \{[e_i, e_j] \mid 0 \leqslant i < j \leqslant k\}$, które podobnie należy traktować jak wektory bazowe przestrzeni $V_1 = \mathbb{R}^{\binom{k+1}{2}}$. Podobnie można dodawać takie kombinacje i mnożyć je przez liczby rzeczywiste.

Ponadto wprowadzamy dodatkowe symbole $[e_i, e_j]$ dla $i \geqslant j$ przyjmując $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$. (W szczególności $[e_i, e_i] = 0$).

Kolejnym krokiem są *dwuwymiarowe sympleksy* $S_2 = \{[e_i, e_j, e_l] \mid 0 \leqslant i < j < l \leqslant k\}$ i przestrzeń wektorowa $V_2 = \mathbb{R}^{\binom{k+1}{3}}$.

Podobnie wprowadzamy dodatkowe symbole $[e_i, e_j, e_l]$, które zmieniają znak przy zamianie dowolnych dwóch „współrzędnych”. Na przykład

$$[e_0, e_1, e_2] = -[e_0, e_2, e_1] = [e_1, e_2, e_0] = -[e_2, e_1, e_0]$$

Wprowadzamy trzy funkcje liniowe nazywane *brzegami*

$$V_2 \xrightarrow{\partial_2} V_1 \xrightarrow{\partial_1} V_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

poprzez zadanie ich wartości na wektorach bazowych

$$\begin{aligned} \partial_0[e_i] &= 0 \\ \partial_1[e_i, e_j] &= [e_j] - [e_i] \\ \partial_2[e_i, e_j, e_l] &= [e_j, e_l] - [e_i, e_l] + [e_i, e_j] \end{aligned}$$

Zauważ, że $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$, bo dla dowolnego wektora bazowego $[e_i, e_j]$ mamy

$$\partial_0(\partial_1[e_i, e_j]) = \partial_0([e_i] - [e_j]) = \partial_0[e_1] - \partial_0[e_0] = 0 - 0 = 0$$

a) Pokaż, że $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. Innymi słowy rozważ sympleks $[e_i, e_j, e_l]$ i rozpisz wyrażenie

$$\partial_1(\partial_2[e_i, e_j, e_l])$$

(8 punktów)

b) Wymyśl (lub znajdź) wyrażenie na brzeg n-wymiarowego sympleksu $[e_0, e_1, \ldots, e_n]$. **(7 punktów)**

Mamy przestrzenie wektorowe oraz mamy przekształcenia liniowe, których złożenie daje zero... Powinno się to kojarzyć z Zadaniem 2.

Zadanie 6. **(10 punktów)** *To zadanie jest trywialne, ale jest niesamowicie ważne dla naszych warsztatów. Ponownie nie ma nic trudnego, poza ćwiczeniem cierpliwości w czytaniu.* Wyobraź sobie ciąg przestrzeni wektorowych i funkcji liniowych

$$\cdots \longrightarrow V_2 \xrightarrow{\partial_2} V_1 \xrightarrow{\partial_1} V_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

takich, że $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ dla wszystkich n. Innymi słowy $\operatorname{im} \partial_{n+1} \leqslant \ker \partial_n$ i możemy rozważyć przestrzeń ilorazową

$$H_n = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$$

nazywanej *n-tą grupą*[1] *homologii.* (To przestrzeń wektorowa, ale istnieją pewne powody by nazywać ją grupą).

Celem tego ćwiczenia jest obliczenie grup homologii ciągu

[1] Zauważ, że każda przestrzeń wektorowa jest grupą abelową ze względu na dodawanie. Istnieją nieco bardziej skomplikowane teorie homologii, w których nie rozważa się przestrzeni wektorowych, ale grupy abelowe.

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Uzupełnij wzór poniżej

$$H_n = \begin{cases} ? & n = 0 \\ ? & n = 1, 2, 3 \ldots \end{cases}$$

Trywialne? Trywialne. Ale okaże się, że to są grupy homologii przestrzeni Euklidesowych $\mathbb{R}^k$*. Grupa* H_0 *pokazuje, że przestrzeń Euklidesowa jest spójna, a wyższe grupy, że nie ma „n-wymiarowych dziur".*